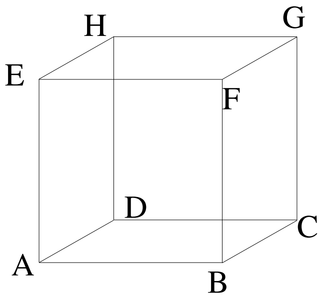
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

I. Vecteurs coplanaires

1. Deux vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires.
2. Trois vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont coplanaires si l'un d'entre eux peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres. C'est-à-dire s'il existe α et β tels que $\vec{u_1}=\alpha\vec{u_2}+\beta\vec{u_3}$ (ou peut-être pour $\vec{u_2}$ ou $\vec{u_3}$).
   Exemple : Dans le cube ABCDEFGH les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$.



3. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires équivaut à dire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

II. Repère

1. Un repère de l'espace est constitué d'un point et de trois vecteurs non coplanaires.
   Exemple : Dans le cube ci-dessus, $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. Un repère de l'espace est orthogonal si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Il est orthonormé (ou orthonormal) s'il est orthogonal et si ses vecteurs sont de même norme. Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ du cube est orthonormé.
3. Dire que le point A a pour coordonnées (x ; y ; z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ équivaut à dire que $\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
   Remarque : Les trois coordonnées d'un point de l'espace s'appellent respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote.

III. Équations

1. **Équation d'un plan**
   a, b, c et d étant quatre réels, (a, b et c n'étant pas tous nuls) l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan P. On dit que l'équation ax+by+cz +d=0 est une équation cartésienne de P.
   Exemple : équation du plan (ABC) avec A(4 ; 0 ; 0), B(0 ; 3 ; 0) et C(1 ; 0 ; 2)

$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ coplanaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$

or on a $\overrightarrow{AM}(x-4;y;z), \overrightarrow{AB}(-4;3;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;0;2)$

donc $\begin{cases} x-4=-4\alpha-3\beta \\ y=3\alpha \\ z=2\beta \end{cases}$. Les deux dernières équations donnent $\alpha=\frac{y}{3}$ et $\beta=\frac{z}{2}$. En remplaçant dans la première équation on obtient :

$$x-4=\frac{-4y}{3}-\frac{3z}{2} \Leftrightarrow 6x-24=-8y-9z \Leftrightarrow 6x+8y+9z-24=0$$

2. **Plans particuliers**
   Un plan est parallèle à un des axes de coordonnées quand un des coefficient a, b ou c de son équation cartésienne est nul ((Ox) si a=0, (Oy) si b=0 et (Oz) si c=0).
   Exemple : Le plan d'équation $5x-4z=4$ est parallèle à (Oy).
   Un plan est parallèle à un des plan de base quand deux des coefficients de son équation sont nuls.
   Exemple : Le plan d'équation $z=17$ est parallèle au plan (xOy).
3. **Vecteur orthogonal à un plan**
   Dans un repère orthonormal, le vecteur $\vec{u}(a;b;c)$ est orthogonal au plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.
4. **Équations de droites**
   L'intersection de deux plans non parallèles étant une droite, une droites est déterminée par un système de deux équations cartésiennes de plans non parallèles, c'est-à-dire pour lesquels les coefficients a, b, c et a', b', c' de leurs équations ne sont pas proportionnels.
   Exemple : $\begin{cases} x-4y+z=-4 \\ y-z=3 \end{cases}$ définit une droite.