LIMITES

I. Généralités

1. Définition

   On dit qu'une fonction f tend vers λ quand x tend vers α si pour que f(x) soit aussi proche que l'on veut de λ, il suffit que x soit suffisamment proche de α. On dit aussi que f a pour limite λ en α et on note $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lambda$

2. Remarque

   Dans la définition précédente, λ et α peuvent aussi bien désigner un nombre réel que l'un des symbole $-\infty$ ou $+\infty$. Dans ce dernier cas, être proche de $+\infty$ signifie être grand.

3. Exemples

   $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$, $\lim_{x \to -\infty} x - 3 = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$

II. Limites des fonctions usuelles

1. Fonction carré

   $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

2. Fonction cube

   $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

3. Fonction racine carrée

   $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

4. Fonction inverse

   $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

5. Fonction carré inverse

   $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$

III. Opérations

1. Somme

   Si l est un nombre réel et si f et g sont des fonctions telles que $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to \alpha} (f(x) + g(x)) = +\infty$. On peut résumer cette propriété en écrivant : « $1 + (+\infty) = +\infty$ » . On a de même
   « $1 + (-\infty) = -\infty$ » , « $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ » ,
   « $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ » et « $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ » .

   Remarque : On ne peut rien dire à priori sur « $(+\infty) + (-\infty)$ » . On dit qu'il s'agit d'une forme indéterminée. On ecrira : « $(+\infty)+(-\infty)=?$ »

2. Produit

Ici l est un nombre réel non nul. On a

« $l\times(\pm\infty)=\pm\infty$ », « $(\pm\infty)\times(\pm\infty)=\pm\infty$ » et « $0\times(\pm\infty)=?$ ».

Remarque : On utilise la règle des signe pour déterminer s'il s'agit de $-\infty$ ou $+\infty$

3. Quotient

Ici l est un nombre réel e l' est un nombre réel non nul. On a

« $\frac{l}{\pm\infty}=0$ », « $\frac{\pm\infty}{l'}=\pm\infty$ », « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}=?$ » et « $\frac{0}{0}=?$ ».

Remarque : Si la fonction garde un signe constant en s'approchant de 0 on a aussi

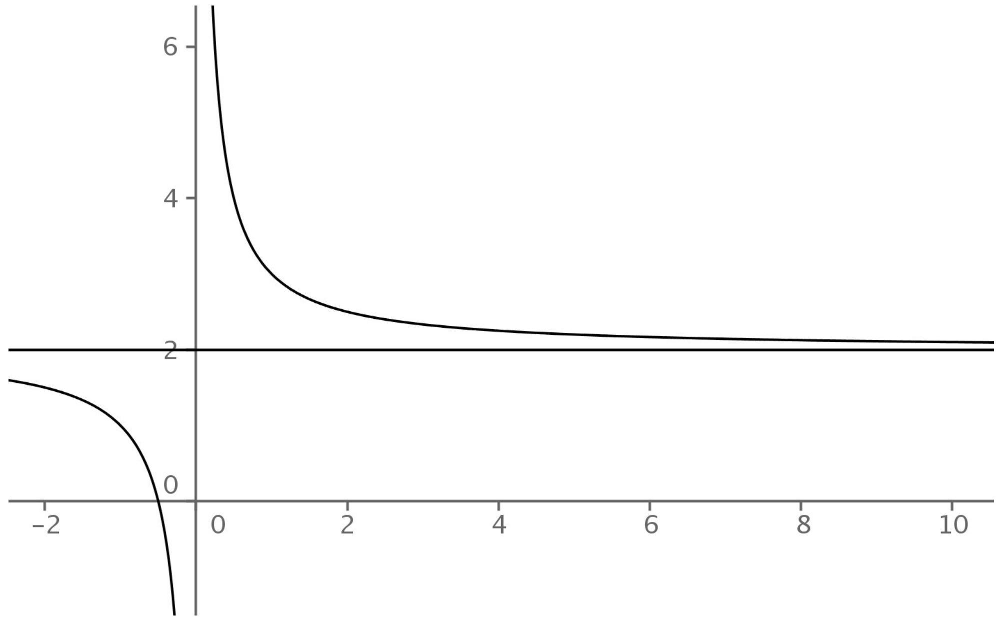
« $\frac{l'}{0}=\pm\infty$ » et « $\frac{\pm\infty}{0}=\pm\infty$ »

IV.Asymptotes

1. Asymptote horizontale

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$, on dit que la droite d'équation $y=l$ est une asymptote (horizontale) à la courbe représentative de f en $-\infty$ ou $+\infty$.

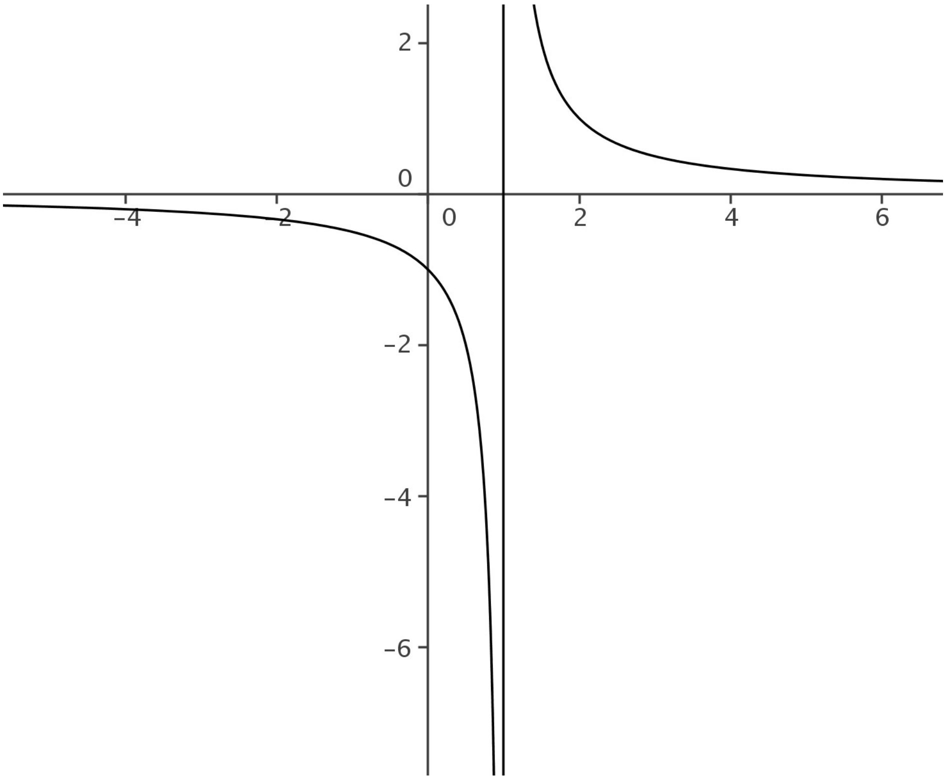
Exemple : Pour la fonction $x\to\frac{1}{x}+2$ on a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+2=0+2=2$ donc la courbe représentative de la fonction f a une asymptote horizontale d'équation $y=2$.



2. Asymptote verticale

Si $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$, on dit que la droite d'équation $x=a$ est une asymptote (verticale) à la courbe représentative de f.

Exemple : Pour la fonction $x \to \frac{1}{x-1}$ on a $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ donc la courbe représentative de la fonction f a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.



3. Asymptote oblique
   Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ ou , $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote (oblique) à la courbe représentative de f en $-\infty$ ou $+\infty$.
   Exemple :Pour la fonction $x \to \frac{1}{x} - x + 3$ on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (-x+3) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
   donc la courbe représentative de la fonction f a une asymptote oblique d'équation $y = -x + 3$.