

# DERIVATION

## I. Notion de limite

1. Si la valeur d'une fonction  $f$  s'approche d'un nombre  $L$  quand la variable s'approche du nombre  $a$ , on dit que  $f$  a pour limite  $L$  en  $a$  et on note :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .
2. Plus précisément,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  signifie que pour que  $f(x)$  soit arbitrairement proche (C'est-à-dire aussi proche que l'on veut) de  $L$ , il suffit que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ .

## II. Nombre dérivé

1. Accroissement moyen

Le nombre  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  Est appelé accroissement moyen de la fonction  $f$  entre  $x_1$  et  $x_2$ .

2. Nombre dérivé

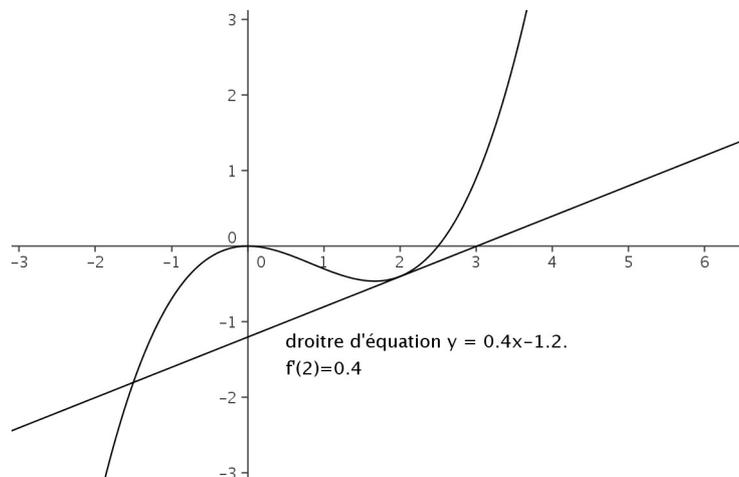
Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe, on appelle ce nombre : nombre dérivé de la fonction  $f$  au point  $a$ . On le note  $f'(a)$  et on dit que  $f$  est dérivable en  $a$ .

Remarque : On utilise souvent la définition équivalente :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

3. Interprétation graphique

$f'(a)$  quand il existe est la pente de la droite tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$ . L'équation de cette tangente est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$



Remarque : Dire que  $f$  est dérivable en  $a$  signifie donc que l'on peut parler de tangente au point d'abscisse  $a$ .

#### 4. Approximation affine

Si  $h$  est voisin de 0, on a  $f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$ . ceci signifie que

$f(a) + f'(a) \times h$  est la fonction affine la plus proche possible de  $f(a+h)$  quand  $h$  est proche de 0.

### III. Fonction dérivée

#### 1. Définition

La fonction telle que  $x \rightarrow f'(x)$  est appelée fonction dérivée de la fonction  $f$ .

Remarque : La fonction dérivée peut être définie sur un intervalle plus petit que celui de  $f$ .

#### 2. Règles de calcul

Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions dérivables et  $k$  une constante on a les règles suivantes :

$f$	$ku$	$u+v$	$uv$	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$u^2$	$u^3$
$f'$	$ku'$	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$2u'u$	$3u'u^2$

3. Remarques : Les fonctions  $\frac{1}{v}$  et  $\frac{u}{v}$  ne sont définies et dérivables que pour  $x$  tel que  $v(x) \neq 0$ .

#### 4. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$k$	$ax+b$	$x^2$	$x^n$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\cos x$	$\sin x$
$f'(x)$	$0$	$a$	$2x$	$nx^{n-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$-\cos x$

Remarque : La dérivée de la fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est définie sur un ensemble plus petit que la fonction elle-même. Les autres fonctions sont dérivables sur tout leur ensemble de définition.

#### 5. Dérivée d'une fonction composée avec une fonction affine

Si  $u$  est une fonction dérivable alors la fonction  $f$  définie par  $f(x) = u(ax+b)$  est dérivable et  $f'(x) = au'(ax+b)$ .