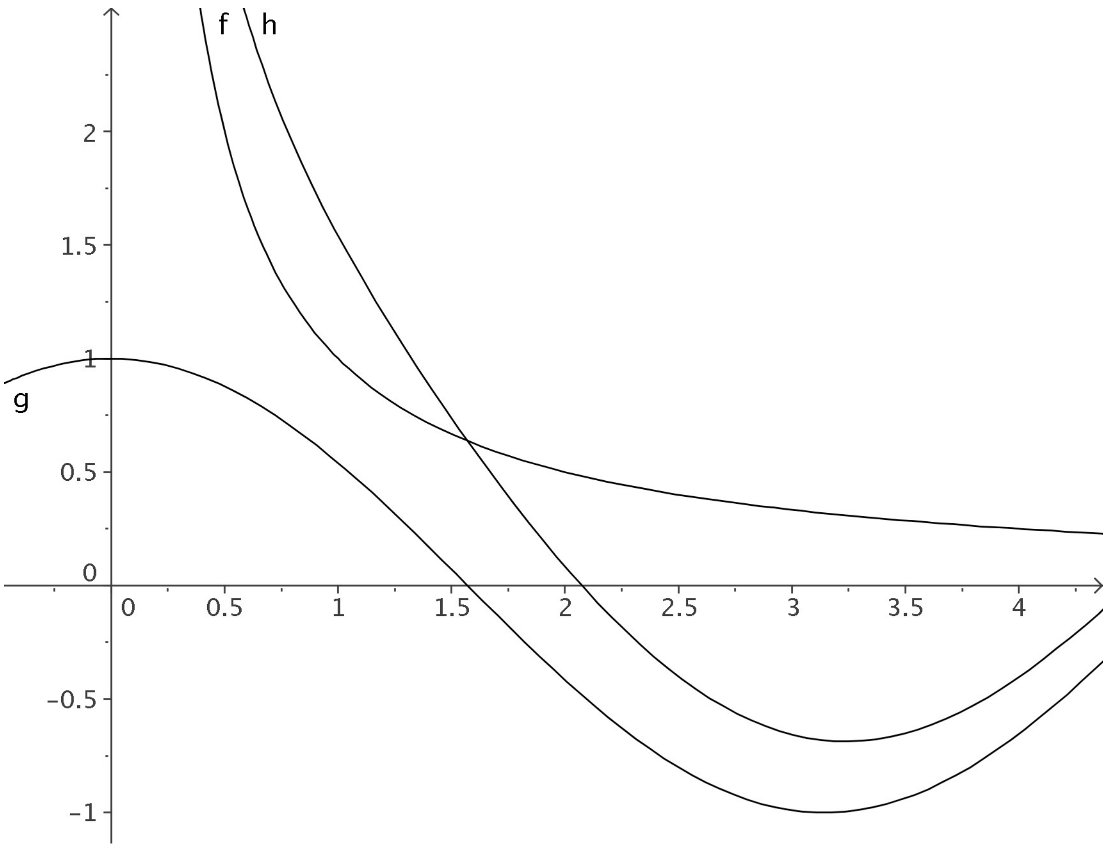
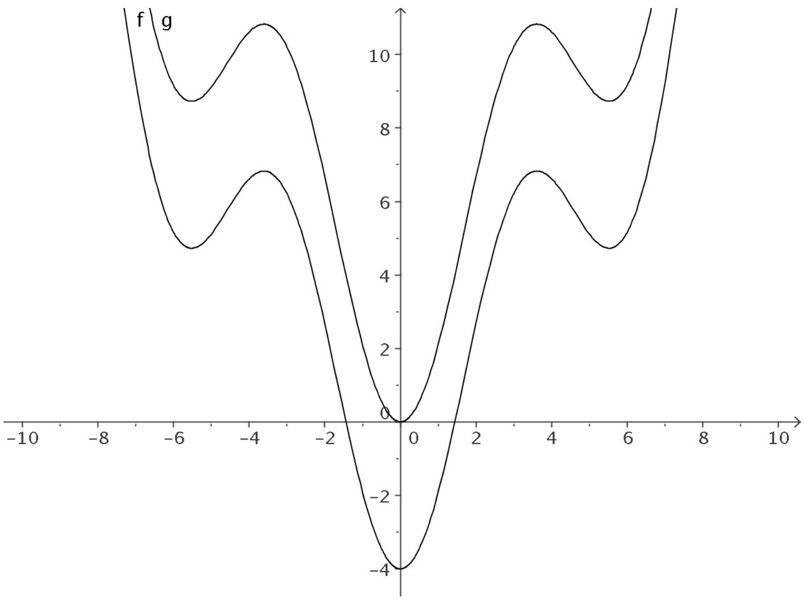
OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

I. Somme de fonctions

1. f et g sont des fonctions définies sur un intervalle [a ; b]. Notons h la fonction définie sur [a ; b] par $h(x)=f(x)+g(x)$.
   a. On obtient la courbe représentative de la fonction h en ajoutant les ordonnées des points des courbes de f et g (pour la même abscisse).
   b. Si f et g sont croissantes, alors h est croissante et si f et g sont décroissantes alors h est décroissante.
2. Remarque :
   Si f et g n'ont pas le même sens de variation on ne peut rien dire de h à priori.



3. Cas particulier :
   Si g est une fonction constante ($g(x)=k$) on obtient la courbe représentative de h par translation de vecteur $(0;k)$ par rapport à celle de f.
   Dans ce cas les variations de h sont les mêmes que celles de f.

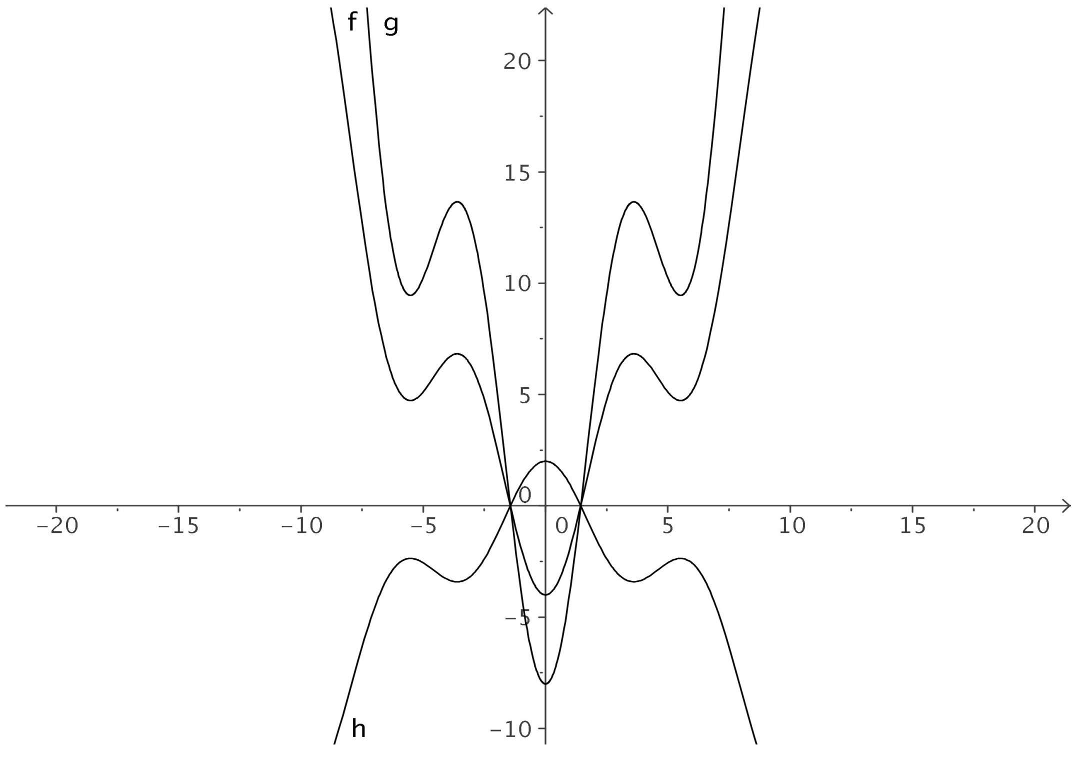


Ici h est la fonction telle que h(x) = f(x)+4

II. Produit d'une fonction par un réel

f est une fonction définie sur un intervalle [a ; b], et k un réel non nul. Notons g la fonction définie sur [a ; b] par $g(x)=kf(x)$.

a. La courbe représentative de la fonction g est la même que celle de la fonction f étirée ou compressée sur l'axe des ordonnées.
   - Si k est négatif La courbe est renversée par rapport à l'axe des abscisses.
   - Si k est égal à -1 La courbe représentative de g est la symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.
b. Les variations de g sont les mêmes que celle de f si k est positif et sont inversées par rapport à celles de f si k est négatif.



Ici g et h sont les fonctions telle que g(x) = 2f(x) et h(x) = -0,5f(x)

III.Composition

1. Définition
   La composée de deux (ou plusieurs) fonctions est la fonction obtenue en appliquant à la variable la première fonction puis en appliquant au résultat obtenue la deuxième. La composée de la fonction f et de la fonction g est donc la fonction telle que $x \rightarrow g(f(x))$. On note cette fonction $g \circ f$
   Remarque : Pour que la fonction composée de f et de g soit définie sur un intervalle [a ; b] il faut que f soit définie sur [a ; b] et que pour tout x de [a ; b], f(x) soit dans l'ensemble de définition de g.
   Exemples :
   a. Si $f(x)=3x-5$ et $g(x)=x^2$,alors
      $g \circ f(x)=(3x+5)^2$ et $f \circ g(x)=3x^2-5$
   b. Si $f_1(x)=x+3$ et $g_1(x)=-\frac{1}{x}$, alors
      $g_1 \circ f_1(x)=-\frac{1}{x+3}$ et $f_1 \circ g_1(x)=-\frac{1}{x}+3$
2. Variations
   a. La composée de deux fonctions de même sens de variation est croissante.
      Exemple : La fonction $f \circ g$ de l'exemple précédent est croissante sur [0;+∞[car f est croissante et g est croissante sur $[0;+\infty[$.
   b. La composée de deux fonctions de sens de variation contraires est décroissante.
      Exemple : La fonction $f_1 \circ g_1$ de l'exemple précédent est décroissante sur $]-\infty;0]$ car f est croissante et g est décroissante sur $]-\infty;0]$.
3. Remarque
   L'étude d'une fonction composée demande en général une étude rigoureuse des intervalles sur lesquels travaillent chaque fonction.
   Exemple : Pour la fonction $g \circ f$ précédente, g est croissante sur $[0;+\infty[$, il faut donc chercher pour quelles valeurs de x, $f(x) \in [0;+\infty[$.
   $f(x) \in [0;+\infty[\Leftrightarrow 3x-5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{5}$. Si $x \in [\frac{3}{5};+\infty[$ alors $f(x) \in [0;+\infty[$. Or f est croissante et g est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $g \circ f$ est croissante sur $[\frac{3}{5};+\infty[$. On montrerais de la même façon que $g \circ f$ est décroissante sur $]-\infty;\frac{3}{5}]$.