PROBABILITÉS

I. Définitions

1. Expérience aléatoire
   Une expérience aléatoire est une expérience pour laquelle différentes issues sont possibles.
   Exemple : Lancer d'un dé, tirage de trois cartes dans un jeu.
2. Événements
   a. Un événement est un ensemble d'issues possibles d'une expérience aléatoire.
   Exemple : Dans le lancer d'un dé, l'événement « obtenir un résultat pair » est l'ensemble des issues (ou résultats ou événements élémentaires) :
   « obtenir 2 », « obtenir 4 » et « obtenir 6 ».
   b. L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers (Ou univers des possibles). On le note Ω .
   c. La partie de l'univers ne contenant aucune issue est appelée événement impossible. On le note $\emptyset$.
   d. L'intersection des évènements A et B est l'événement qui a lieu quand A et B ont lieu en même temps. On le note $A \cap B$.
   e. L'union de deux évènements A et B est l'événement qui a lieu quand A ou B ont lieu (ou les deux). On le note $A \cup B$.
   f. L'événement contraire d'un événement A est l'événement qui a lieu quand A n'a pas lieu. On le note $\bar{A}$.
   g. Deux évènements incompatibles sont deux évènements qui ne peuvent pas se produire en même temps.
3. Probabilité
   Définir une probabilité (ou loi de probabilité) pour une expérience aléatoire c'est associer à chaque issue (ou événement élémentaire) un nombre compris entre 0 et 1 et de telle sorte que la somme de tous ces nombre soit égale à 1.
   remarque : Associer le nombre $\frac{n}{p}$ à une issue signifie que cette issue a n chances sur p de se produire.
   Exemple : Si on lance une pièce de monnaie et que l'on examine le côté qu'elle présente, on a deux issues : PILE ou FACE. Si la pièce est équilibrée, on associeras le même nombre : $\frac{1}{2}$ à chacune des issues.
   Propriétés
   a. La probabilité p(A) d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui composent A.
   b. $p(\Omega)=1$. $p(\emptyset)=0$.
   c. Quels que soient les évènements A et B, $p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$.
   d. Si A et B sont incompatibles, $p(A \cap B)=0$ et $p(A \cup B)=p(A)+p(B)$.
   e. Pour tout événement A, $p(\bar{A})=1-p(A)$.

II. Équiprobabilité

1. Il y a équiprobabilité dans une expérience aléatoire si toutes les issues ont la même probabilité. Si il y a n issues possibles, toutes les issues auront donc comme probabilité $\frac{1}{n}$.
2. Si il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par :
   $p(A)=\frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$.
   Remarque : en général on formalise une expérience aléatoire pour faire apparaître une situation d'équiprobabilité. Dans ce cas, le calcul se ramène à un dénombrement des différentes issues.

III. Loi des grands nombres

Si on répète une même expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition d'un événement A se rapproche de p(A).

IV. Variable aléatoire

1. Définition
   Une variable aléatoire est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour une variable aléatoire X, l'ensemble des issue associées à la valeur a se note $\{X=a\}$.
   Exemple : Dans le cas du lancer d'une pièce, on définit la variable aléatoire X par 0 si on obtient « FACE » et 1 si on obtient « PILE ». Si la pièce est équilibrée, on aura $p(X=0)=p(X=1)=\frac{1}{2}$.
2. Loi de probabilité
   La loi de probabilité d'une variable aléatoire est l'ensemble des probabilités associées à ses valeurs possibles. Dans l'exemple précédent on aura :

x_i	0	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3. Espérance mathématique
   L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est le nombre :
   $E(X)=\sum_{i=0}^{n} p_i x_i$. C'est la « moyenne » de la loi.
   Remarque : Quand les élément de Ω sont directement identifiables à des nombres, la variable aléatoire est sous-entendue et on note l'espérance μ .
4. Variance et écart type
   La variance d'une variable aléatoire X est le nombre :
   $V(X)=\sum_{i=0}^{n} p_i(x_i-E(X))^2$. L'écart type est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.