PRODUIT SCALAIRE

I. Définition

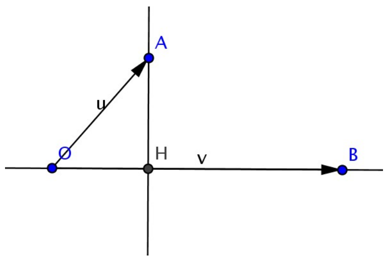
1. L'expression $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ est appelée produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est notée $\vec{u}.\vec{v}$

   remarque : $\vec{u}.\vec{u}$ se note $\vec{u}^2$. $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.
2. Si on considère trois points O, A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et si on appelle H le projeté orthogonal de A sur (OB), alors :

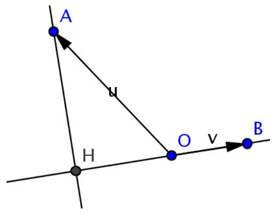
   $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OH\times OB$ si $O\notin[HB]$ et

   $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-OH\times OB$ si $O\in[HB]$

   car $OH=|OB\times\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})|$



$O\notin[HB], \vec{u}.\vec{v}>0$



$O\in[HB], \vec{u}.\vec{v}<0$

II. Propriétés

1. Propriété fondamentale

   $\vec{u}.\vec{v}=0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.
2. Règles de calcul

   pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout nombre réel a on a
   a. $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
   b. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
   c. $a\times(\vec{u}.\vec{v})=(a\vec{u}).\vec{v}$
3. Identités remarquables
   a. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$.
   b. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$.
   c. $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.
4. Conséquence

   $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$.

III. Expression analytique

Dans un repère orthonormal, si on a $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.

IV.Applications

1. Droite définie par un point et un vecteur normal
   a. La droite d ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}$ et passant par A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à $\vec{u}$ c'est-à -dire, tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$.
   b. Si on a $\vec{u}(a;b)$ et $A(x_A;y_A)$ Dans un repère orthonormal, alors $M(x;y)\in d \Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$. Ceci est l'équation de d.
2. Cercle
   a. Le cercle C de centre A et de rayon R est l'ensemble des points M vérifiant $AM=R$. De plus, $AM=R\Leftrightarrow AM^2=R^2\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2=R^2$.
   b. Si on a $A(x_A;y_A)$ Dans un repère orthonormal, alors $M(x;y)\in C \Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$. Ceci est l'équation de C.
   Remarque : L'équation précédente peut se mettre sous la forme : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ mais toute équation de cette forme n'est pas nécessairement une équation de cercle.