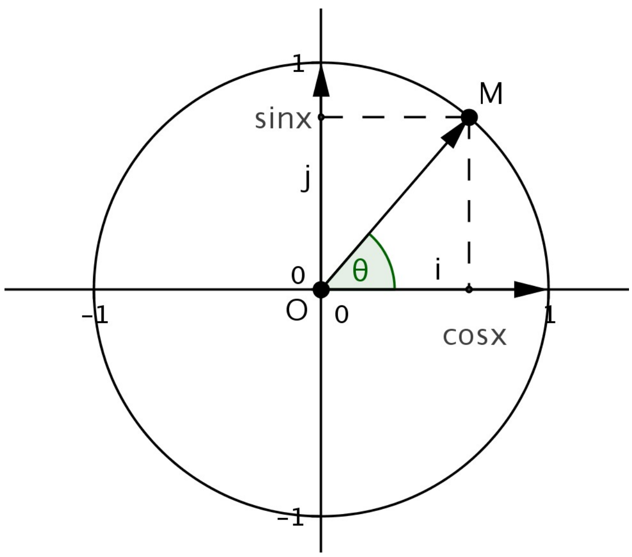
TRIGONOMÉTRIE

I. Angles orientés

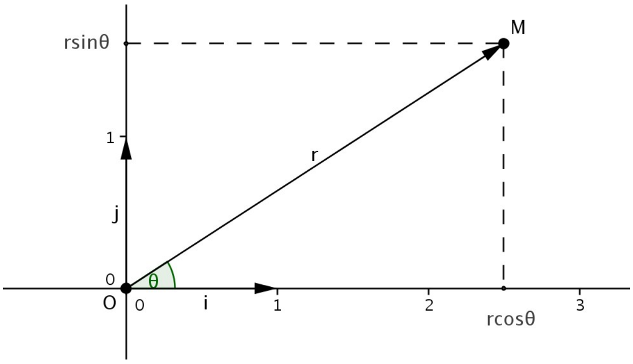
1. Définition
   Un couple de vecteurs définit un angle orienté dont la mesure (en radians) n'est définie qu'à $2k\pi$ près. L'angle défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note $(\vec{u},\vec{v})$
   Remarque : Tout angle n'a qu'un mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
   Cette mesure est appelée mesure principale.
2. Propriétés :
   a. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, $(\vec{u},\vec{v})=0+2k\pi$
      Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$
   b. $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})+2k\pi$
   c. $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})+2k\pi$
   d. $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi+2k\pi$

II. Cercle trigonométrique

1. Dans un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, c'est-à-dire pour lequel $(\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}$, le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé cercle trigonométrique.
2. Fonctions trigonométriques
   Pour tout réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=x$. (x représente la longueur de l'arc compris entre le point de coordonnées (1 ; 0) et le point M)
   - Le cosinus du réel x, noté $\cos x$ est l'abscisse du point M précédemment défini.
   - Le sinus du réel x, noté $\sin x$ est son ordonnée.
   - La tangente est le quotient du sinus par le cosinus, $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.



3. Coordonnées polaires
Étant donné un point M dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le couple (r, θ) tel que $r = OM$ et $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ forme les coordonnées polaires du point M.
Si par ailleurs on a M(x;y) alors :
   - $x = r \times \cos\theta$
   - $y = r \times \sin\theta$



III.Formules trigonométriques

1. Valeurs remarquables des sinus et cosinus
   a. $\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
   b. $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   c. $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   d. $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
   e. $\cos\frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0$
2. Formules élémentaires
   a. $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
   b. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
   c. $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
   d. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
   e. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$
3. Formules de sommes
   a. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
   b. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
   c. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
   d. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
4. Conséquences
   a. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
   b. $\sin 2a = 2\cos a \sin a$
   c. $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

IV. Relations métriques dans le triangle

Dans ce paragraphe, ABC est un triangle, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. De plus on note S l'aire de ABC.

1. Relation fondamentale (Al Kashi)
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\hat{A}$
2. Aire
   $S = \frac{1}{2} bc \sin\hat{A}$
   Conséquence
   $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$
3. Formule de la médiane
   Notons I le milieu de [AB]. On a
   $CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2} AB^2$