VARIATIONS ET LIMITES

I. Variations et dérivée.

1. Si une fonction f est dérivable et croissante sur un intervalle $[a;b]$, alors $f'(x)\geq 0$ sur $[a;b]$. Si f est décroissante, $f'(x)\leq 0$.
2. Réciproquement, si une fonction f est dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et si $f'(x)\geq 0$ sur $[a;b]$ alors f est croissante sur $[a;b]$. Si $f'(x)\leq 0$ f est décroissante.
   Étudier les variations d'une fonction revient donc à étudier le signe de sa dérivée.
3. Conséquence
   Si une fonction f, dérivable sur un intervalle $[a;b]$, admet un extremum local en une valeur $c\in]a;b[$ alors $f'(c)=0$.
   Remarque : La réciproque n'est pas vraie.

II. Limites

1. Définitions
   On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si pour que f(x) soit aussi grand que l'on veut, il suffit que x soit suffisamment grand. Plus précisément, quelque-soit le réel A, on peut trouver un réel a tel que si $x\geq a$ alors $f(x)\geq A$. On dit aussi dans ce cas que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
   On dit qu'une fonction f tend vers Λ quand x tend vers α si pour que f(x) soit aussi proche que l'on veut de Λ , il suffit que x soit suffisamment proche de α. Plus précisément, quelque-soit le réel $\epsilon>0$, on peut trouver un réel $\delta>0$ tel que si $|x-\alpha|\leq\delta$ alors $|f(x)-\Lambda|\leq\epsilon$. On dit aussi dans ce cas que f a pour limite Λ en α et on note $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\Lambda$.
   On définit de façon semblable, $\lim_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\Lambda$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ etc...
   Exemples
   $\lim_{x\to 2} x^2=4$, $\lim_{x\to-\infty} x-3=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$.
   Remarque : En général, si une fonction f est définie pour un réel α, alors $\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$ mais ce n'est pas forcément le cas.

2. Opérations sur les limites
   a. Somme
      Si Λ est un nombre réel, si α est un nombre réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$ et si f et g sont des fonctions telles que $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\Lambda$ et $\lim_{x\to\alpha} g(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to\alpha} (f(x)+g(x))=+\infty$. On peut résumer cette

propriété en écrivant : « $\Lambda+(+\infty)=+\infty$ ». On a de même

« $\Lambda+(-\infty)=-\infty$ », « $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ »,

« $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ » et « $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ ».

Remarque : On ne peut rien dire à priori sur « $(+\infty)+(-\infty)$ ». On dit qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

b. Produit

Ici Λ est un nombre réel non nul. On a

« $\Lambda\times(\pm\infty)=\pm\infty$ », « $(\pm\infty)\times(\pm\infty)=\pm\infty$ » et

« $0\times(\pm\infty)$ » est une forme indéterminée.

Remarque : On utilise la règle des signes pour déterminer s'il s'agit de $-\infty$ ou $+\infty$

c. Quotient

Ici Λ est un nombre réel et Λ' est un nombre réel non nul. On a

« $\frac{\Lambda}{\pm\infty}=0$ », « $\frac{\pm\infty}{\Lambda'}=\pm\infty$ »,

« $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ » sont des formes indéterminées..

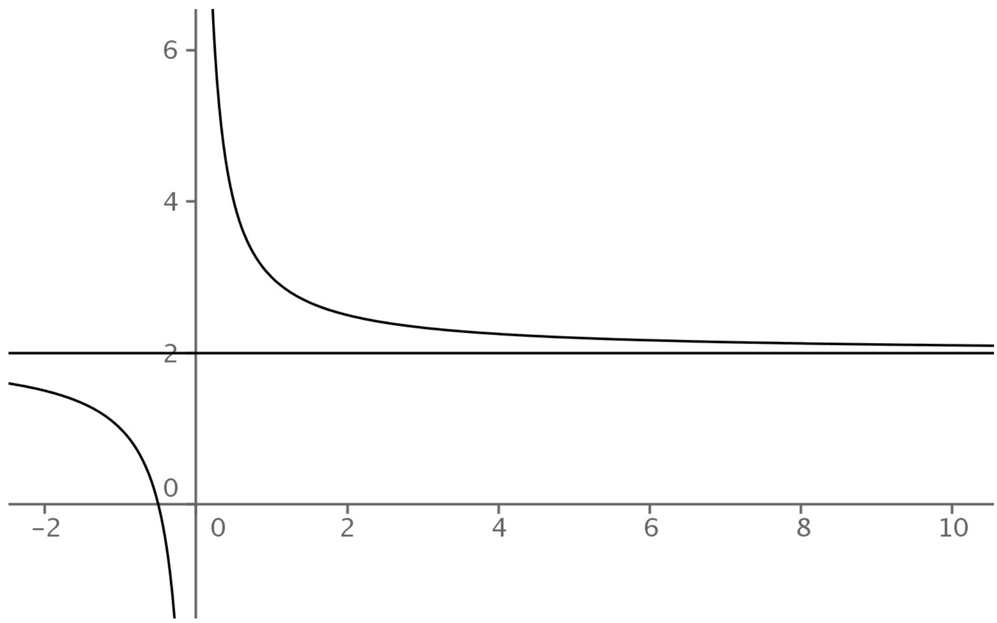
Remarque : Si la fonction garde un signe constant en s'approchant de 0 on a aussi « $\frac{\Lambda}{0}=\pm\infty$ » et « $\frac{\pm\infty}{0}=\pm\infty$ »

III. Asymptotes

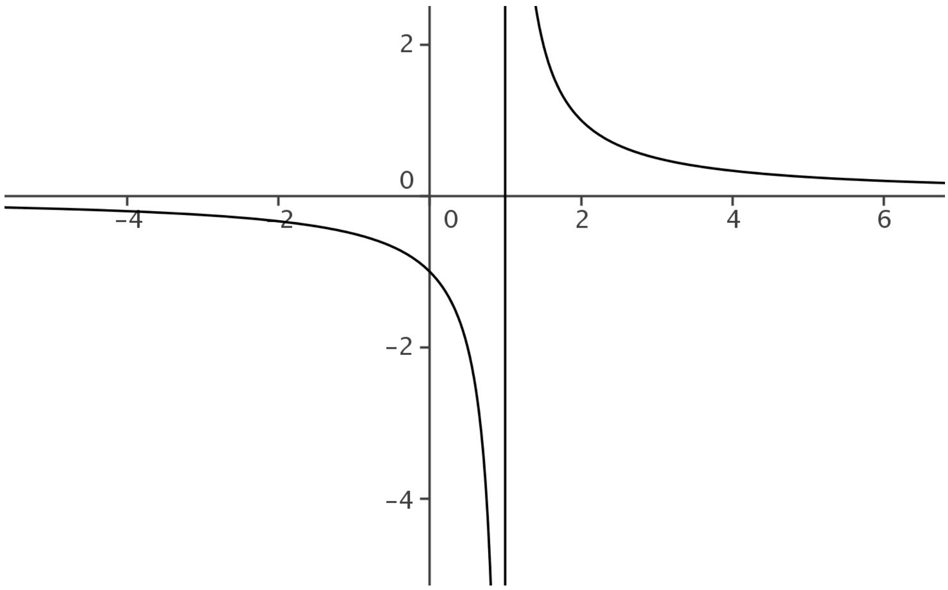
1. Asymptote horizontale

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\Lambda$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\Lambda$, on dit que la droite d'équation $y=\Lambda$ est une asymptote (horizontale) à la courbe représentative de f en $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemple : Pour la fonction $x\to\frac{1}{x}+2$ on a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+2=0+2=2$ donc la courbe représentative de la fonction f a une asymptote horizontale d'équation $y=2$.



2. Asymptote verticale
   Si $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$, on dit que la droite d'équation $x=a$ est une asymptote (verticale) à la courbe représentative de f.
   Exemple : Pour la fonction $x \to \frac{1}{x-1}$ on a $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\text{"}\frac{1}{0^-}\text{"}=-\infty$ donc la courbe représentative de la fonction f a une asymptote verticale d'équation $x=1$.



3. Asymptote oblique
   Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b))=0$ ou , $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-(ax+b))=0$ on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote (oblique) à la courbe représentative de f en $-\infty$ ou $+\infty$.
   Exemple :Pour la fonction $x \to \frac{1}{x}-x+3$ on a
   $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x+3)=\lim_{x\to+\infty} \text{"}\frac{1}{x}\text{"}=0$ donc la courbe représentative de la fonction f a une asymptote oblique d'équation $y=-x+3$.