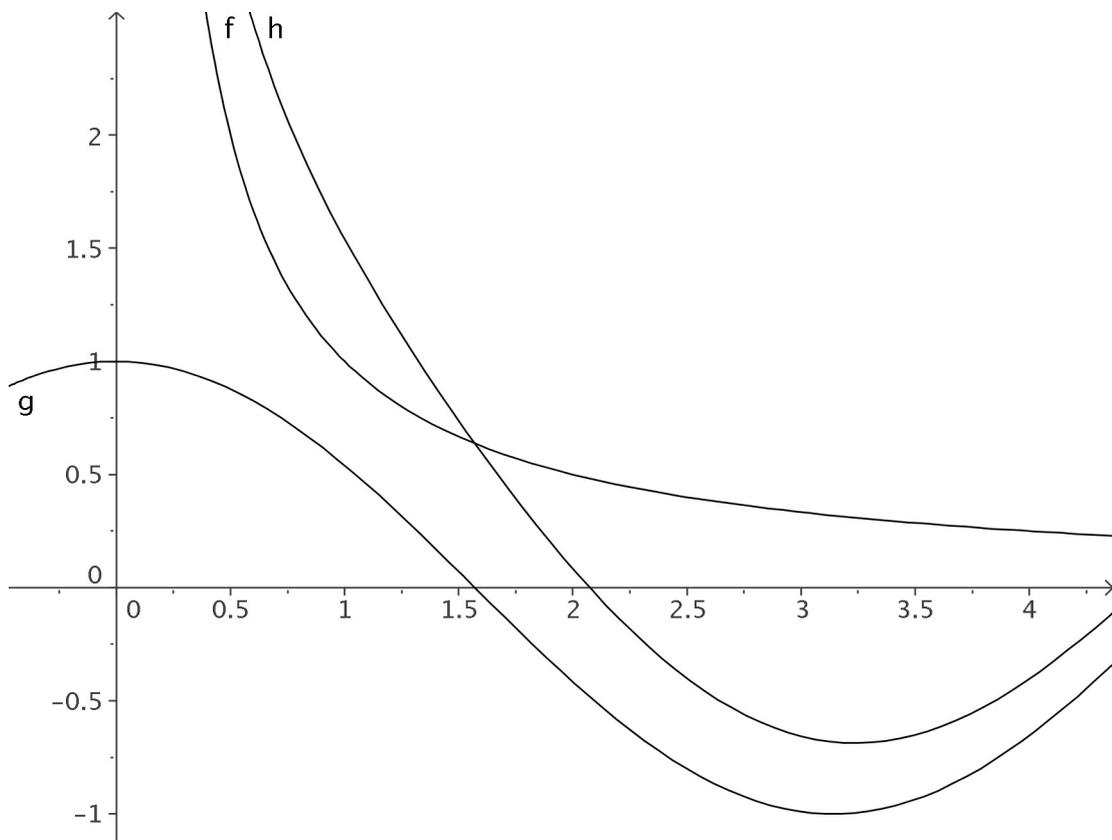


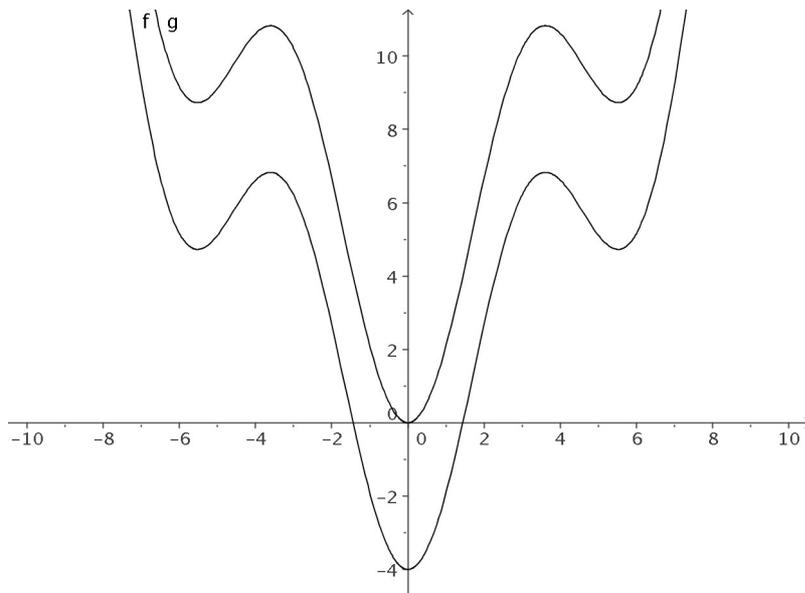
OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

I. Somme de fonctions

1. f et g sont des fonctions définies sur un intervalle $[a ; b]$. Notons h la fonction définie sur $[a ; b]$ par $h(x) = f(x) + g(x)$.
 - a. On obtient la courbe représentative de la fonction h en ajoutant les ordonnées des points des courbes de f et g (pour la même abscisse).
 - b. Si f et g sont croissantes, alors h est croissante et si f et g sont décroissantes alors h est décroissante.
2. Remarque :
Si f et g n'ont pas le même sens de variation on ne peut rien dire de h à priori.



3. Cas particulier :
Si g est une fonction constante ($g(x) = k$) on obtient la courbe représentative de h par translation de vecteur $(0; k)$ par rapport à celle de f .
Dans ce cas les variations de h sont les mêmes que celles de f .

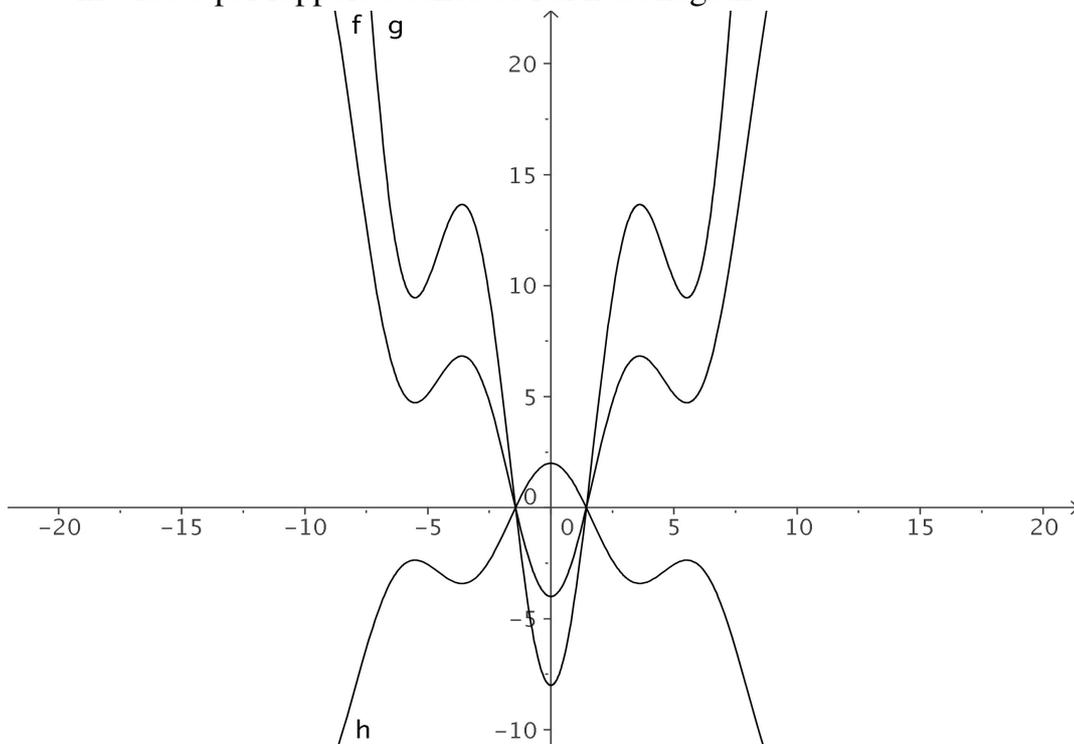


Ici h est la fonction telle que $h(x) = f(x)+4$

II. Produit d'une fonction par un réel

f est une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$, et k un réel non nul. Notons g la fonction définie sur $[a ; b]$ par $g(x) = kf(x)$.

- La courbe représentative de la fonction g est la même que celle de la fonction f étirée ou compressée sur l'axe des ordonnées.
 - Si k est négatif La courbe est renversée par rapport à l'axe des abscisses.
 - Si k est égal à -1 La courbe représentative de g est la symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.
- Les variations de g sont les mêmes que celle de f si k est positif et sont inversées par rapport à celles de f si k est négatif.



Ici g et h sont les fonctions telle que $g(x) = 2f(x)$ et $h(x) = -0,5f(x)$

III. Composition

1. Définition

La composée de deux (ou plusieurs) fonctions est la fonction obtenue en appliquant à la variable la première fonction puis en appliquant au résultat obtenue la deuxième. La composée de la fonction f et de la fonction g est donc la fonction telle que $x \rightarrow g(f(x))$. On note cette fonction $g \circ f$

Remarque : Pour que la fonction composée de f et de g soit définie sur un intervalle $[a ; b]$ il faut que f soit définie sur $[a ; b]$ et que pour tout x de $[a ; b]$, $f(x)$ soit dans l'ensemble de définition de g .

Exemples :

a. Si $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = x^2$, alors

$$g \circ f(x) = (3x - 5)^2 \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = 3x^2 - 5$$

b. Si $f_1(x) = x + 3$ et $g_1(x) = -\frac{1}{x}$, alors

$$g_1 \circ f_1(x) = -\frac{1}{x+3} \quad \text{et} \quad f_1 \circ g_1(x) = -\frac{1}{x} + 3$$

2. Variations

a. La composée de deux fonctions de même sens de variation est croissante.

Exemple : La fonction $f \circ g$ de l'exemple précédent est croissante sur $[0 ; +\infty[$ car f est croissante et g est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b. La composée de deux fonctions de sens de variation contraires est décroissante.

Exemple : La fonction $f_1 \circ g_1$ de l'exemple précédent est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ car f est croissante et g est décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

3. Remarque

L'étude d'une fonction composée demande en général une étude rigoureuse des intervalles sur lesquels travaillent chaque fonction.

Exemple : Pour la fonction $g \circ f$ précédente, g est croissante sur $[0 ; +\infty[$, il faut donc chercher pour quelles valeurs de x , $f(x) \in [0 ; +\infty[$.

$f(x) \in [0 ; +\infty[\Leftrightarrow 3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5}$. Si $x \in [\frac{3}{5} ; +\infty[$ alors $f(x) \in [0 ; +\infty[$. Or f

est croissante et g est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $g \circ f$ est croissante sur

$[\frac{3}{5} ; +\infty[$. On montrerais de la même façon que $g \circ f$ est décroissante sur

$] -\infty ; \frac{3}{5}]$.

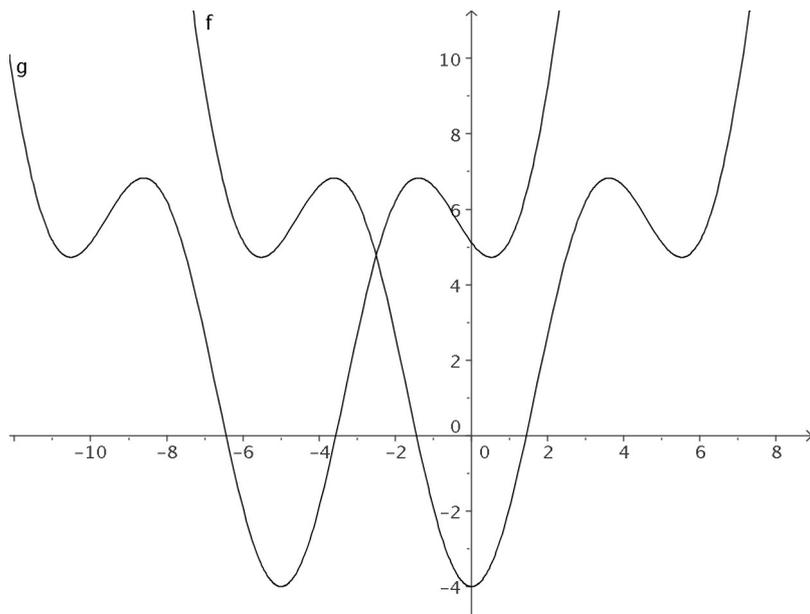
4. Cas particulier

$$x \rightarrow f(x+k)$$

f est une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$, et k un réel quelconque. Notons g la fonction définie sur $[a-k ; b-k]$ par $g(x) = f(x+k)$.

a. La courbe représentative de la fonction g est l'image de celle de la fonction f par une translation de vecteur $(-k ; 0)$.

b. g a le même sens de variation sur un intervalle $[c-k ; d-k]$ que f sur $[c ; d]$.



Ici g est la fonction telle que $g(x) = f(x+5)$