

PRODUIT SCALAIRE

I. Définition

1. L'expression $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ est appelée produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} et est notée $\vec{u} \cdot \vec{v}$

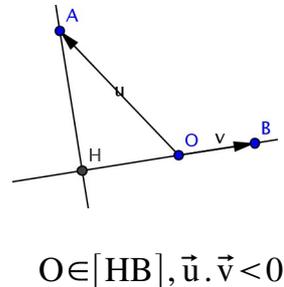
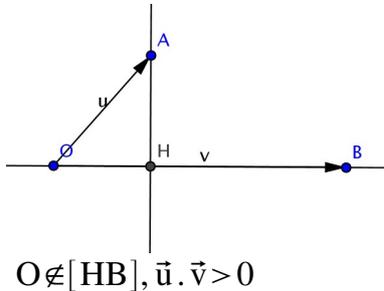
remarque : $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note \vec{u}^2 . $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

2. Si on considère trois points O, A et B tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$ et si on appelle H le projeté orthogonal de A sur (OB), alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = OH \times OB \quad \text{si } O \notin [HB] \text{ et}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -OH \times OB \quad \text{si } O \in [HB]$$

$$\text{car } OH = OB \times |\cos(\vec{OA}, \vec{OB})|$$



II. Propriétés

1. Propriété fondamentale

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à \vec{u} et \vec{v} orthogonaux.

2. Règles de calcul

pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , et tout nombre réel a on a

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

c. $a \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a \vec{u}) \cdot \vec{v}$

3. Identités remarquables

a. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.

b. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.

c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

4. Conséquence

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) .$$

III. Expression analytique

Dans un repère orthonormal, si on a $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' .$$

IV. Applications

1. Droite définie par un point et un vecteur normal
 - a. La droite d ayant pour vecteur normal le vecteur \vec{u} et passant par A est l'ensemble des points M tels que \overrightarrow{AM} soit orthogonal à \vec{u} c'est-à-dire, tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.
 - b. Si on a $\vec{u}(a;b)$ et $A(x_A; y_A)$ Dans un repère orthonormal, alors $M(x;y) \in d \Leftrightarrow a(x-x_A) + b(y-y_A) = 0$. Ceci est l'équation de d .
2. Cercle
 - a. Le cercle C de centre A et de rayon R est l'ensemble des points M vérifiant $AM = R$. De plus, $AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = R^2$.
 - b. Si on a $A(x_A; y_A)$ Dans un repère orthonormal, alors $M(x;y) \in C \Leftrightarrow (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = R^2$. Ceci est l'équation de C .
Remarque : L'équation précédente peut se mettre sous la forme :
 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ mais toute équation de cette forme n'est pas nécessairement une équation de cercle.

V. Relations métriques dans le triangle

Dans ce paragraphe, ABC est un triangle, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. De plus on note S l'aire de ABC .

1. Relation fondamentale (Al Kashi)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

2. Aire

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

Conséquence

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

3. Formule de la médiane

Notons I le milieu de $[AB]$. On a

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2} AB^2$$