DERIVATION

I. Notion de limite

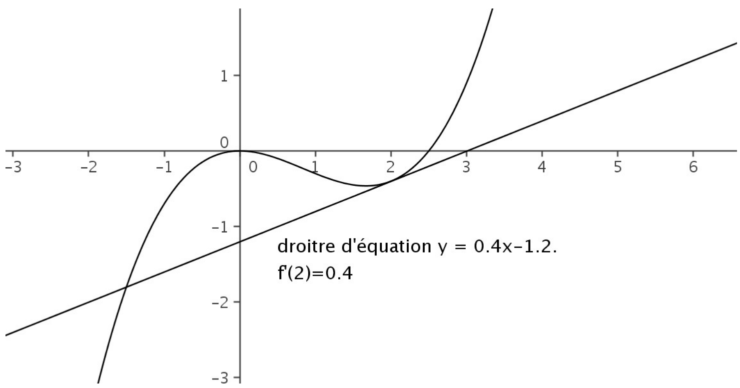
1. Si la valeur d'une fonction f s'approche d'un nombre L quand la variable s'approche du nombre a , on dit que f a pour limite L en a et on note : $\lim_{x \to a} f(x) = L$.
2. Plus précisément, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ signifie que pour que $f(x)$ soit arbitrairement proche (C'est-à-dire aussi proche que l'on veut) de L , il suffit que x soit suffisamment proche de a .

II. Nombre dérivé

1. Accroissement moyen
   Le nombre $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est appelé accroissement moyen de la fonction f entre x_1 et x_2 .

2. Nombre dérivé
   Si $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, on appelle ce nombre : nombre dérivé de la fonction f en a . On le note $f'(a)$ et on dit que f est dérivable en a .
   Remarque : On utilise souvent la définition équivalente :
   $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

3. Interprétation graphique
   $f'(a)$ quand il existe est la pente de la droite tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a . L'équation de cette tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$



Remarque : Dire que f est dérivable en a signifie donc que l'on peut parler de tangente au point d'abscisse a .

4. Approximation affine

   Si h est voisin de 0, on a $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)\times h$. Plus précisément :

   a. Si f est une fonction dérivable en a, alors il existe une fonction ϵ vérifiant $\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$ telle que $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+h\epsilon(h)$.

   b. Réciproquement, s'il existe un nombre α et une fonction ϵ vérifiant $\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$ telle que $f(a+h)=f(a)+\alpha h+h\epsilon(h)$ alors f est dérivable en a et $f'(a)=\alpha$.

   Ceci signifie que $f(a)+f'(a)h$ est la fonction affine la plus proche possible de $f(a+h)$ quand h est proche de 0.

III.Fonction dérivée

1. Définition

   La fonction telle que $x\to f'(x)$ est appelée fonction dérivée de la fonction f.

   Remarque : La fonction dérivée peut être définie sur un intervalle plus petit que celui de f.

2. Règles de calcul

   Si u et v sont des fonctions dérivables et k une constante on a les règles suivantes :

f	ku	$u+v$	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	u^2	u^3
f'	ku'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$2u'u$	$3u'u^2$

3. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	k	$ax+b$	x^2	x^n	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\cos x$	$\sin x$
$f'(x)$	0	a	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\sin x$	$\cos x$

   Remarque : La dérivée de la fonction $x\to\sqrt{x}$ est définie sur un ensemble plus petit que la fonction elle-même. Les autres fonctions sont dérivables sur tout leur ensemble de définition.

4. Dérivée d'une fonction composée avec une fonction affine

   Si u est une fonction dérivable alors la fonction f définie par $f(x)=u(ax+b)$ est dérivable et $f'(x)=au'(ax+b)$.

IV. Applications aux variations

1. Si une fonction f est dérivable et croissante sur un intervalle $[a;b]$, alors $f'(x)\geq 0$ sur $[a;b]$. Si f est décroissante, $f'(x)\leq 0$.
2. Réciproquement, si une fonction f est dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et si $f'(x)\geq 0$ sur $[a;b]$ alors f est croissante sur $[a;b]$. Si $f'(x)\leq 0$ f est décroissante.
   Étudier les variations d'une fonction revient donc à étudier le signe de sa dérivée.
3. Conséquence
   Si une fonction f, dérivable sur un intervalle $[a;b]$, admet un extremum local en une valeur $c\in]a;b[$ alors $f'(c)=0$.
   Remarque : La réciproque n'est pas vraie.