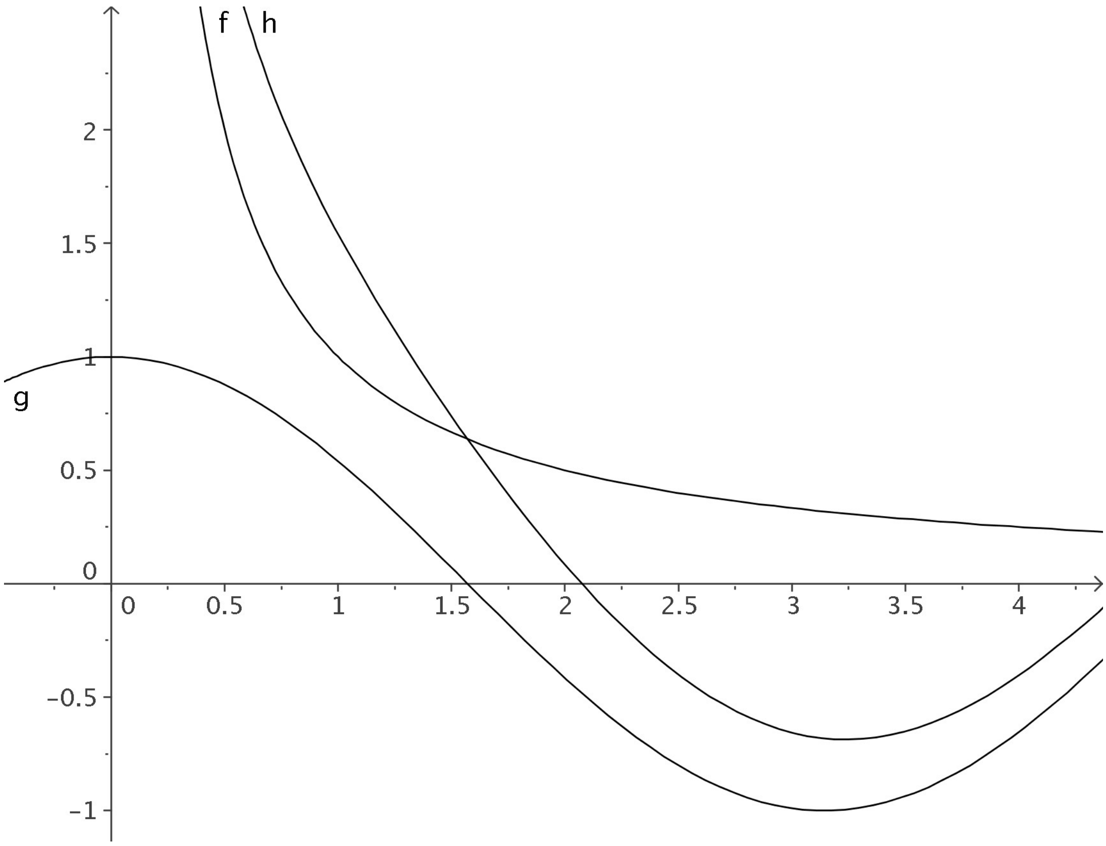
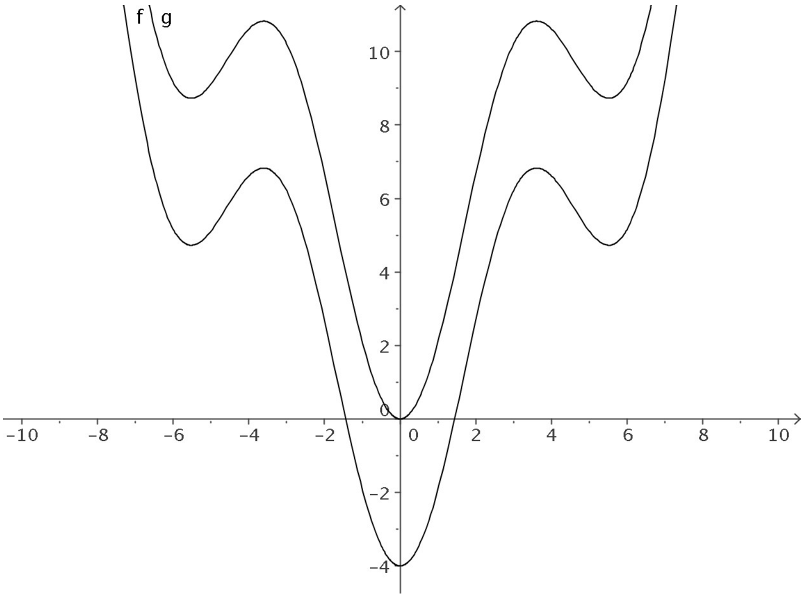
OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

I. Somme de fonctions

1. f et g sont des fonctions définies sur un intervalle $[a;b]$. Notons h la fonction définie sur $[a;b]$ par $h(x)=f(x)+g(x)$.
   a. On obtient la courbe représentative de la fonction h en ajoutant les ordonnées des points des courbes de f et g (pour la même abscisse).
   b. Si f et g sont croissantes, alors h est croissante et si f et g sont décroissantes alors h est décroissante.
2. Remarque :
   Si f et g n'ont pas le même sens de variation on ne peut rien dire de h à priori.



3. Cas particulier :
   Si g est une fonction constante ($g(x)=k$) on obtient la courbe représentative de h par translation de vecteur $\vec{u}(0;k)$ par rapport à celle de f.
   Dans ce cas les variations de h sont les mêmes que celles de f.



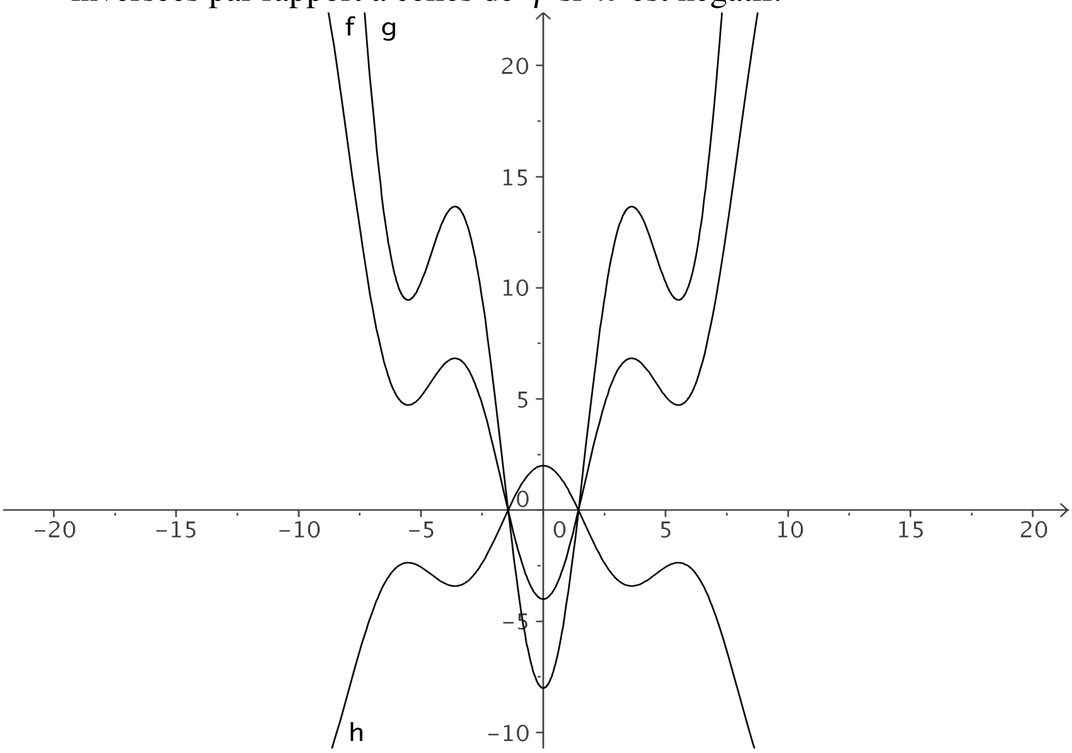
Ici h est la fonction telle que $h(x)=f(x)+4$

II. Produit d'une fonction par un réel

f est une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$, et k un réel non nul. Notons g la fonction définie sur $[a;b]$ par $g(x)=kf(x)$.

a. La courbe représentative de la fonction g est la même que celle de la fonction f étirée ou compressée sur l'axe des ordonnées.
- Si k est négatif La courbe est renversée par rapport à l'axe des abscisses.
- Si k est égal à -1 La courbe représentative de g est la symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.

b. Les variations de g sont les mêmes que celle de f si k est positif et sont inversées par rapport à celles de f si k est négatif.



Ici g et h sont les fonctions telle que $g(x)=2f(x)$ et $h(x)=-0{,}5f(x)$

III.Composition

1. Définition

   La composée de deux (ou plusieurs) fonctions est la fonction obtenue en appliquant à la variable la première fonction puis en appliquant au résultat obtenu la deuxième. La composée de la fonction f et de la fonction g est donc la fonction telle que $x \to g(f(x))$. On note cette fonction $g \circ f$

   Remarque : Pour que la fonction composée de f et de g soit définie sur un intervalle $[a;b]$ il faut que f soit définie sur $[a;b]$ et que pour tout x de $[a;b]$, $f(x)$ soit dans l'ensemble de définition de g .

   Exemples :

   a. Si $f(x)=3\text{x}-5$ et $g(x)=x^2$, alors
      $g \circ f(x)=(3\text{x}-5)^2$ et $f \circ g(x)=3\text{x}^2-5$

   b. Si $f_1(x)=x+3$ et $g_1(x)=-\frac{1}{x}$, alors
      $g_1 \circ f_1(x)=-\frac{1}{x+3}$ et $f_1 \circ g_1(x)=-\frac{1}{x}+3$

2. Variations

   a. La composée de deux fonctions de même sens de variation est croissante.
      Exemple : La fonction $f \circ g$ de l'exemple précédent est croissante sur $[0;+\infty[$ car f est croissante et g est croissante sur $[0;+\infty[$.

   b. La composée de deux fonctions de sens de variation contraires est décroissante.
      Exemple : La fonction $f_1 \circ g_1$ de l'exemple précédent est décroissante sur $]-\infty;0]$ car f est croissante et g est décroissante sur $]-\infty;0]$.

3. Remarque

   L'étude d'une fonction composée demande en général une étude rigoureuse des intervalles sur lesquels travaille chaque fonction.

   Exemple : Pour la fonction $g \circ f$ précédente, g est croissante sur $[0;+\infty[$, il faut donc chercher pour quelles valeurs de x , $f(x) \in [0;+\infty[$.

   $f(x) \in [0;+\infty[\Leftrightarrow 3\text{x}-5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{5}$. Si $x \in [\frac{3}{5};+\infty[$ alors $f(x) \in [0;+\infty[$. Or f est croissante et g est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $g \circ f$ est croissante sur $[\frac{3}{5};+\infty[$. On montrerais de la même façon que $g \circ f$ est décroissante sur $]-\infty;\frac{3}{5}]$.

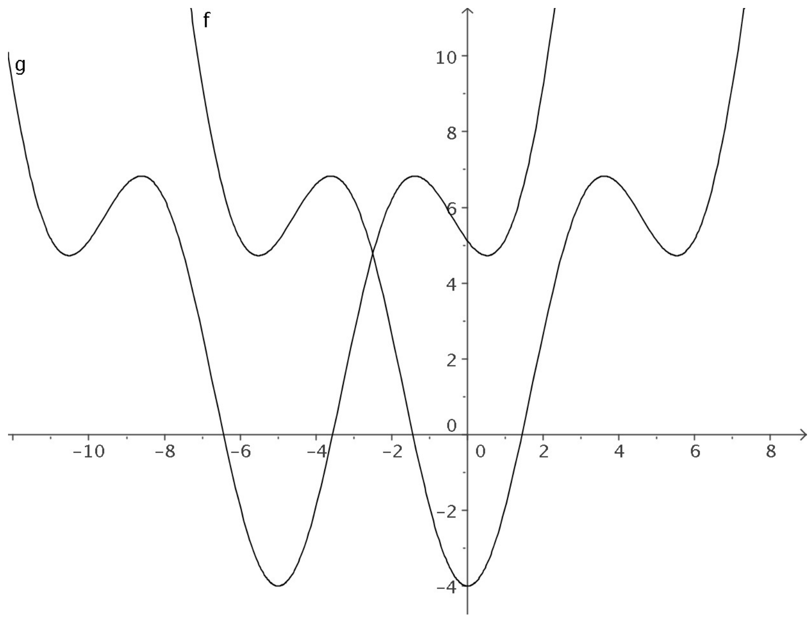
4. Cas particulier

   $x \to f(x+k)$

   f est une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$, et k un réel quelconque. Notons g la fonction définie sur $[a-k;b-k]$ par $g(x)=f(x+k)$.

   a. La courbe représentative de la fonction g est l'image de celle de la fonction f par une translation de vecteur $\vec{u}(-k;0)$.

   b. g a le même sens de variation sur un intervalle $[c-k;d-k]$ que f sur $[c;d]$.



Ici g est la fonction telle que $g(x) = f(x+5)$