PROBABILITÉS

I. Définitions

1. Événements
   a. L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers (Ou univers des possibles). On le note Ω .
   b. La partie de l'univers ne contenant aucune issue est appelée événement impossible. On le note $\varnothing$.
   c. L'intersection des évènements A et B est l'événement qui a lieu quand A et B ont lieu en même temps. On le note $A \cap B$.
   d. L'union de deux évènements A et B est l'événement qui a lieu quand A ou B ont lieu (ou les deux). On le note $A \cup B$.
   e. L'événement contraire d'un événement A est l'événement qui a lieu quand A n'a pas lieu. On le note $\bar{A}$.
   Remarque : Étant donné un événement A , $\bar{A}$ est l'unique événement tel que $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \varnothing$.
   f. Deux évènements incompatibles sont deux évènements qui ne peuvent pas se produire en même temps. A et B incompatibles équivaut à $A \cap B = \varnothing$.
2. Probabilité
   Définir une probabilité (ou loi de probabilité) pour une expérience aléatoire c'est associer à chaque issue (ou événement élémentaire) un nombre compris entre 0 et 1 et de telle sorte que la somme de tous ces nombre soit égale à 1.
   Propriétés
   a. La probabilité $p(A)$ d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui composent A .
   b. $p(\Omega)=1$ et $p(\varnothing)=0$.
   c. Quels que soient les évènements A et B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
   d. Si A et B sont incompatibles, $p(A \cap B) = 0$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
   e. Pour tout événement A , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

II. Équiprobabilité

1. Il y a équiprobabilité dans une expérience aléatoire si toutes les issues ont la même probabilité. Si il y a n issues possibles, toutes les issues auront donc comme probabilité $\frac{1}{n}$.
2. Si il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par :
   $$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}$$
   Remarque : en général on formalise une expérience aléatoire pour faire apparaître une situation d'équiprobabilité. Dans ce cas, le calcul se ramène à un dénombrement des différentes issues.

III. Loi des grands nombres

Si on répète une même expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition d'un événement A se rapproche de $p(A)$.

IV. Variable aléatoire

1. Définition

   Une variable aléatoire est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour une variable aléatoire X, l'ensemble des issues associées à la valeur a se note $\{X=a\}$.

   Exemple : Dans le cas du lancer d'une pièce, on définit la variable aléatoire X par 0 si on obtient « FACE » et 1 si on obtient « PILE ». Si la pièce est équilibrée, on aura $p(X=0)=p(X=1)=\frac{1}{2}$.

2. Loi de probabilité

   La loi de probabilité d'une variable aléatoire est l'ensemble des probabilités associées à ses valeurs possibles. Dans l'exemple précédent on aura :

x_i	0	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3. Espérance mathématique

   L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est le nombre :

   $E(X)=\sum_{i=0}^{n} p_i x_i$. C'est la « moyenne » de la loi.

   Remarque : Quand les élément de Ω sont directement identifiables à des nombres, la variable aléatoire est sous-entendue et on note l'espérance μ.

4. Variance et écart type

   La variance d'une variable aléatoire X est le nombre :

   $V(X)=\sum_{i=0}^{n} p_i(x_i-E(X))^2$. L'écart type est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.