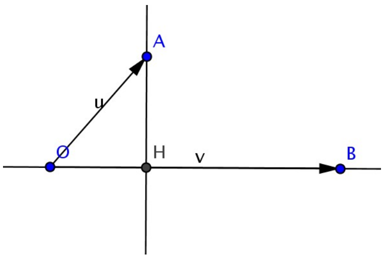
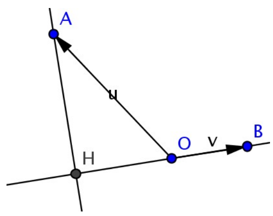
PRODUIT SCALAIRE

I. Définition

1. L'expression $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ ($\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos\widehat{BAC}$ où A, B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$) est appelée produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est notée $\vec{u}.\vec{v}$.
   remarque : $\vec{u}.\vec{u}$ se note $\vec{u}^2$. de plus, $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.
2. Si on considère trois points O, A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et si on appelle H le projeté orthogonal de A sur (OB), alors :
   $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OH\times OB$ $\quad si\, O\notin[HB]$ et
   $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-OH\times OB$ $\quad si\, O\in[HB]$
   car $OH=OA\times|\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})|$



$O\notin[HB], \vec{u}.\vec{v}>0$



$O\in[HB], \vec{u}.\vec{v}<0$

II. Propriétés

1. Propriété fondamentale
   $\vec{u}.\vec{v}=0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.
   Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.
2. Règles de calcul
   pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout nombre réel a on a
   a. $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
   b. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
   c. $a\times(\vec{u}.\vec{v})=(a\vec{u}).\vec{v}$
3. Identités remarquables
   a. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$.
   b. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$.
   c. $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.
4. Conséquence
   $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$.

III.Expression analytique

Dans un repère orthonormal, si on a $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ alors
$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.

IV. Applications

1. Droite définie par un point et un vecteur normal
   a. La droite d ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}$ et passant par A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à $\vec{u}$ c'est-à -dire, tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$.
   b. Si on a $\vec{u}(a;b)$ et $A(x_A;y_A)$ Dans un repère orthonormal, alors $M(x;y)\in d \Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$. Ceci est l'équation de d .
2. Cercle
   a. Le cercle C de centre A et de rayon R est l'ensemble des points M vérifiant $AM=R$. De plus, $AM=R\Leftrightarrow AM^2=R^2\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2=R^2$.
   b. Si on a $A(x_A;y_A)$ dans un repère orthonormal, alors $M(x;y)\in C \Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$. Ceci est l'équation de C .
   Remarque : L'équation précédente peut se mettre sous la forme : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ mais toute équation de cette forme n'est pas nécessairement une équation de cercle.

V. Relations métriques dans le triangle

Dans ce paragraphe, ABC est un triangle, on note $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$. De plus on note S l'aire de ABC .

1. Relation fondamentale (Al Kashi)
   $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$
2. Aire
   $S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$
   Conséquence
   $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$
3. Formule de la médiane
   Notons I le milieu de $[AB]$. On a
   $CA^2+CB^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$