

SECOND DEGRÉ

I. Polynôme

1. Définition

Un polynôme est une fonction définie sur \mathbb{R} de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (\text{avec } a_n \neq 0).$$

n s'appelle le degré du polynôme P .

Remarque : Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.

2. Racine

Une valeur a telle que $P(a) = 0$ est appelé racine du polynôme P .

Propriété : Si a est une racine du polynôme P , alors il existe un polynôme Q tel que pour tout x , $P(x) = (x - a)Q(x)$.

II. Trinôme du second degré

1. Forme réduite

L'expression $P(x) = ax^2 + bx + c$ est appelé trinôme du second degré (en x) exprimé sous forme réduite. C'est donc un polynôme de degré 2.

2. Forme canonique

en posant $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$ on obtient $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette expression est la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Remarques :

1) La représentation graphique d'un trinôme du second degré est une parabole dont le sommet est le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

2) On déduit de la forme canonique que si $a > 0$, la fonction $x \rightarrow P(x)$ est décroissante sur $] -\infty; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$. Le contraire si $a < 0$.

III. Équation du second degré

1. Discriminant

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. On le note Δ .

2. Résolution

La résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du discriminant.

a. Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

b. Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad \text{Ces valeurs sont donc les racines du trinôme.}$$

c. Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution unique : $x = \frac{-b}{2a}$.

IV. Factorisation et signe du trinôme

1. Factorisation

a. Si $\Delta < 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.

b. Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

c. Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

2. Signe

a. Si $\Delta \leq 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a .

b. Si $\Delta > 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $] -\infty; x_1]$, du signe opposé à celui de a sur $[x_1; x_2]$ et du signe de a sur $[x_2; +\infty [$.

c. En résumé : le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines si elles existent.