SUITES

I. Généralités

1. Définition
   Une suite numérique est une succession de nombres réels appelés termes. Le terme de rang n d'une suite u se note u_n, la suite elle-même se note u, (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Suite définie par une formule explicite
   On peut définir une suite avec une formule qui donne chaque terme en fonction de son rang.
   Exemples :
   Si $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $u_n=2n-3$ on a $u_0=2\times0-3=-3$ puis $u_1=-1$ etc...
   Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que $v_n=\dfrac{2^n}{n}$ on a $v_1=\dfrac{2^1}{1}=2$ puis $v_2=\dfrac{2^2}{2}=2$, $v_3=\dfrac{2^3}{3}=\dfrac{8}{3}$ etc...
3. Suite définie par récurrence
   On peut définir une suite en donnant le premier (ou les premiers) terme(s) puis une formule donnant un terme en fonction du (ou des) précédent(s).
   Exemples :
   Si $u_0=2$ et $u_{n+1}=u_n-5$, on a $u_1=u_0-5=2-5=-3$ puis $u_2=-3-5=-8$ etc...
   Si $v_0=1$, $v_1=1$ et $v_{n+2}=v_{n+1}+v_n$, on a $v_2=v_1+v_0=2$ puis $v_3=v_2+v_1=3$ etc...

II. Variations

1. Suite croissante
   Une suite u est croissante (resp strictement croissante) si pour tout n, $u_{n+1}\geq u_n$ (resp $u_{n+1}>u_n$).
2. Suite décroissante
   Une suite u est décroissante (resp strictement decroissante) si pour tout n, $u_{n+1}\leq u_n$ (resp $u_{n+1}<u_n$).
3. Suite monotone
   Une suite toujours croissante ou toujours décroissante est dite monotone.
   Remarque : Étudier le sens de variation d'une suite revient à étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$, ou, si $u_n>0$, étudier si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$.

III. Suite arithmétique

1. Une suite arithmétique de raison r est une suite telle que pour tout n, $u_{n+1}=u_n+r$. dans ce cas on a aussi $u_n=u_0+n\times r$.
2. Une suite arithmétique est monotone, croissante si sa raison est positive, décroissante si elle est négative et constante si elle est nulle.

3. Somme des termes

   Si (u_n) est une suite arithmétique, $\sum_{i=0}^{i=n} u_i = \frac{u_0+u_n}{2} \times (n+1)$.

   Remarque cette formule se résume par :

   $\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$.

IV. Suite géométrique

1. Une suite géométrique de raison q est une suite telle que pour tout n , $u_{n+1}=u_n \times q$.
   dans ce cas on a aussi $u_n = u_0 \times q^n$.
2. Une suite géométrique u est monotone si sa raison q est positive. Elle est croissante si $u_0>0$ et $q>1$ ou si $u_0<0$ et $0<q<1$. Elle est décroissante si $u_0>0$ et $0<q<1$ ou si $u_0<0$ et $q>1$. Elle est constante si $q=1$.
3. Somme des termes

   Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , $\sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

   Remarque cette formule se résume par : $\text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

V. Limites

1. Définitions

   a. Si pour tout nombre réel A , $u_n > A$ à partir d'un certain rang, alors, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. On définit de la même façon $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

   b. Étant donné un réel Λ , Si pour tout intervalle ouvert I contenant Λ , $u_n \in I$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \Lambda$.

   Remarque : dans ce cas on dit que la suite (u_n) est convergente. Dans les autres cas, on dit que la suite est divergente.
2. Suite géométrique

   Une suite géométrique de raison q est convergente (vers 0) si $-1<q<1$. Si $q>1$ la suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et si $q \leq -1$ la suite n'a pas de limite.

   Remarque : la somme des termes d'une suite géométrique converge si $-1<q<1$.
3. Limites par comparaison

   Si on a une suite v telle que $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ (resp $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$) et si u est une suite telle que $u_n \geq v_n$ (resp $u_n \leq v_n$)(au moins à partir d'un certain rang) alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

   Théorème des gendarmes

   Si on a 2 suites v et w telles que $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \Lambda$ et si u est une suite telle que $v_n \leq u_n \leq w_n$ (au moins à partir d'un certain rang) alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \Lambda$.