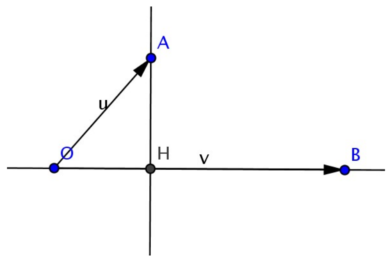
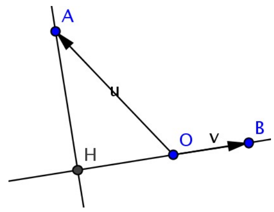
PRODUIT SCALAIRE

I. Définition

1. L'expression $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ est appelée produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est notée $\vec{u}.\vec{v}$.
   remarque : $\vec{u}.\vec{u}$ se note $\vec{u}^2$. de plus, $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.
2. Si on considère trois points O, A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et si on appelle H le projeté orthogonal de A sur (OB), alors :
   $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OH\times OB$ $\quad si\,O\notin[HB]$ et
   $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-OH\times OB$ $\quad si\,O\in[HB]$
   car $OH=OA\times|\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})|$.
   Remarque : Dans tous les cas, $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB}$



$O\notin[HB], \vec{u}.\vec{v}>0$



$O\in[HB], \vec{u}.\vec{v}<0$

II. Propriétés

1. Propriété fondamentale
   $\vec{u}.\vec{v}=0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.
   Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.
2. Règles de calcul
   pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout nombre réel a on a
   a. $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
   b. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
   c. $a\times(\vec{u}.\vec{v})=(a\vec{u}).\vec{v}$
3. Identités remarquables
   a. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$.
   b. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$.
   c. $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.
4. Conséquence
   $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$.

III.Expression analytique

Dans un repère orthonormal, si on a $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ alors
$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.