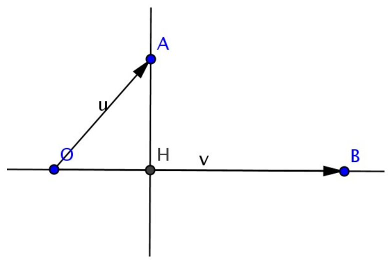
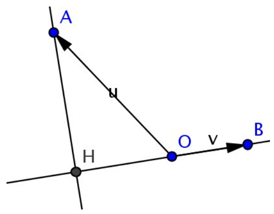
PRODUIT SCALAIRE

I. Définition

1. L'expression $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ est appelée produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est notée $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
   remarque : $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^2$. de plus, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
2. Si on considère trois points O, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et si on appelle H le projeté orthogonal de A sur (OB), alors :
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OH \times OB \qquad si\, O \notin [HB]$ et
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OH \times OB \qquad si\, O \in [HB]$
   car $OH = OA \times |\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})|$.
   Remarque : Dans tous les cas, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB}$



$O \notin [HB], \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$



$O \in [HB], \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

II. Propriétés

1. Propriété fondamentale
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.
   Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.
2. Règles de calcul
   pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout nombre réel a on a
   a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
   b. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
   c. $a \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v}$
3. Identités remarquables
   a. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.
   b. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.
   c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.
4. Conséquence
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ et
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

III. Expression analytique

Dans un repère orthonormal, si on a $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ alors
$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.