1èreS

Corrigé du devoir surveillé n°10

Exercice 1

1. $\frac{3\sqrt{3}+12}{4\sqrt{3}+3}=\frac{(3\sqrt{3}+12)(4\sqrt{3}-3)}{(4\sqrt{3}+3)(4\sqrt{3}-3)}=\frac{39\sqrt{3}}{39}=\sqrt{3}$ Puis $(3\sqrt{3}+12)\times\sqrt{3}=12\sqrt{3}+9$ Donc ces trois réels peuvent être les termes d'une suite géométrique de raison $\sqrt{3}$.
2. $u_0+u_1+\ldots+u_6=17\times\frac{1-4^7}{1-4}=17\times\frac{1-16386}{-3}=17\times\frac{16383}{3}=92837$.
3. $1+\frac{5}{7}+\frac{5^2}{7^2}+\ldots+\frac{5^n}{7^n}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=\frac{5}{7}$ donc $1+\frac{5}{7}+\frac{5^2}{7^2}+\ldots+\frac{5^n}{7^n}=1\times\frac{1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{7}}=\frac{7}{2}\left(1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right)$.

Exercice 2

1. $u_2=2u_1-u_0=2\times5-1=9$, $u_3=2u_2-u_1=2\times9-5=13$ et $u_4=2u_3-u_2=2\times13-9=17$.
2. $u_n=u_0+nr=1+4n$.
3. $u_0+u_1+\ldots+u_{19}=\frac{(u_0+u_{19})}{2}\times20=\frac{1+1+4\times19}{2}\times20=780$.

Exercice 3

1. f est la fonction définie par $f(x)=\frac{5x+4}{x+2}$.

   $f(x)=x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5x+4}{x+2}=x \quad\Leftrightarrow\quad x(x+2)=5x+4 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-3x-4=0$. On obtient $\alpha=-1$ et $\beta=4$.
2. $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+4}{u_n+2}-4}{\frac{5u_n+4}{u_n+2}+1}=\frac{\frac{u_n-4}{u_n+2}}{\frac{6u_n+6}{u_n+2}}=\frac{u_n-4}{6u_n+6}$. On remarque que $v_{n+1}=\frac{u_n-4}{6u_n+6}=\frac{1}{6}\times\frac{u_n-4}{u_n+1}=\frac{1}{6}v_n$,

   donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0=\frac{u_0-4}{u_0+1}=\frac{\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{7}{3}$.
3. a) $v_n=v_0\times q^n=-\frac{7}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$

   b) $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1} \quad\Leftrightarrow\quad v_n(u_n+1)=u_n-4 \quad\Leftrightarrow\quad v_nu_n-u_n=-4-v_n \quad\Leftrightarrow\quad u_n(v_n-1)=-(v_n+4)$

   $\Leftrightarrow \quad u_n=-\frac{v_n+4}{v_n-1}$ donc $u_n=-\frac{-\frac{7}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+4}{-\frac{7}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n-1}$

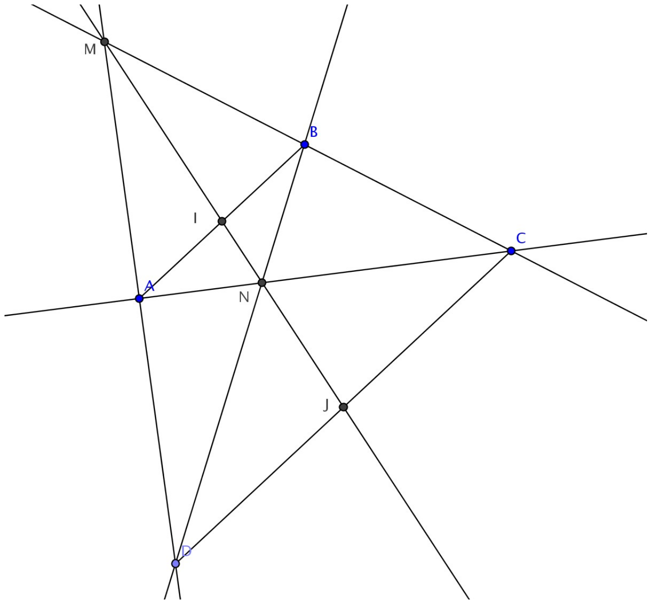
   c) $-1<\frac{1}{6}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\frac{0+4}{0-1}=4$.

Exercice 4

1. B' est l'image de B par l'homothétie h de centre A et de rapport -2 donc $\overrightarrow{AB'}=-2\overrightarrow{AB}$. On a $\overrightarrow{AB'}=-2\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}(2;1)$ donc $\overrightarrow{AB'}(-4;-2)$ puis $B'(-1-4;2-2)$ c-a-d $B'(-5;0)$.
2. De même $\overrightarrow{AC'}=-2\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}$. On a $\overrightarrow{AC'}(4;-4)$ donc $\overrightarrow{AC}(-2;2)$ puis $C(-3;4)$.

Exercice 5

A, D et M sont alignés donc on peut définir l'homothétie h_1 de centre M qui transforme A en D.
$h_1(B)$ appartient à la parallèle à (AB) passant par $h_1(D)$, donc $h_1(B) \in (CD)$. De plus, M, B et $h_1(B)$ sont alignés donc $h_1(B) = C$. l'homothétie conserve le milieu donc $h_1(I) = J$ et $M \in (IJ)$.
On définit de la même façon l'homothétie h_2 de centre N qui transforme A en C et on prouve que $N \in (IJ)$. Les quatre point M, N, I et J sont donc alignés.



Exercice 6

AMN est un triangle équilatéral direct, donc $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = +\frac{\pi}{3}$ et N est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$. Donc quand M parcourt Δ, N parcourt l'image de Δ par la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.