1èreS

Correction du devoir surveillé n°2

Exercice 1

1.a. Vérifier que pour tout x de I, $2-\frac{7}{x+3}=\frac{2(x+3)-7}{x+3}=\frac{2x-1}{x+3}=f(x)$.

b. $f(x)=(w\circ v\circ u)(x)$ avec $u(x)=x+3$, $v(x)=\frac{1}{x}$ et $w(x)=2-7x$.

$-2\leq x<x'\leq 4 \Leftrightarrow 1\leq x+3<x'+3\leq 7 \Leftrightarrow 1\geq\frac{1}{(x+3)}>\frac{1}{(x'+3)}\geq\frac{1}{7} \Leftrightarrow -5\leq 2-\frac{7}{(x+3)}<2-\frac{7}{(x'+3)}\leq 1$

$\Leftrightarrow -5\leq f(x)<f(x')\leq 1$ Donc f est croissante sur $[-2;4]$

c. $-5\leq f(x)\leq 1$ ceci a été établi à la question précédente.

2.

$-5\leq x<x'\leq 1 \Leftrightarrow 7\geq 2-x>2-x'\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{7}\leq\frac{1}{(2-x)}<\frac{1}{(2-x')}\leq 1 \Leftrightarrow -2\leq -3+\frac{7}{(2-x)}<-3+\frac{7}{(2-x')}\leq 4$

$\Leftrightarrow -2\leq g(x)<g(x')\leq 4$ Donc g est croissante sur $[-5;1]$ et $-2\leq g(x)\leq 4$

3. $g\circ f$ est défini sur I si f est définie sur et si pour $x\in I$, $f(x)\in J$. Or f est effectivement définie sur I et $f(x)\in J$ comme établi à la question 1.c. $g\circ f(x)=-3+\frac{7}{2-(2-\frac{7}{x+3})}=-3+\frac{7}{\frac{7}{x+3}}=-3+x+3=x$.

4.Les courbes représentatives de f et de g semblent symétriques par rapport à Δ.

Exercice 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=3$ et $(\vec{u},\vec{v})=45°$. On pose $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{t}=2\vec{u}-3\vec{v}$.

1. Faire une figure représentant les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$.
2. $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})=4\times 4\times\frac{1}{2}=8$, $\vec{w}^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=16+16+16=48$,

   $\vec{t}^2=(2\vec{u}-3\vec{v})^2=4\vec{u}^2-12\vec{u}.\vec{v}+9\vec{v}^2=64-96+144=112$ et

   $\vec{w}.\vec{t}=(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-3\vec{v})=2\vec{u}^2-3\vec{u}.\vec{v}+2\vec{v}.\vec{u}-3\vec{v}^2=2\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}-3\vec{v}^2=32-8-48=-24$.
3. $\vec{w}.\vec{t}=\|\vec{w}\|\times\|\vec{t}\|\times\cos(\vec{w},\vec{t})$ donc $\cos(\vec{w},\vec{t})=\frac{\vec{w}.\vec{t}}{\|\vec{w}\|\times\|\vec{t}\|}=\frac{-24}{\sqrt{48}\times\sqrt{112}}=\frac{-3}{2\sqrt{3}\times\sqrt{7}}\simeq -0,327$ donc

   $(\vec{w},\vec{t})\simeq 109°$.

Exercice 3

2. $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM}=EF\times EF=EF^2=4a^2$ Car F est le projeté orthogonal de M sur (EF) et

   $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EK}=EH^2=a^2$ Car H est le projeté orthogonal de K sur (EH) .

   $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}=(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HK}).(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FM})=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{FM}=$
3. $0+\frac{1}{3}\overrightarrow{HG}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}+0=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}^2=\frac{4a^2}{3}+\frac{a^2}{2}=\frac{11a^2}{6}$ d'une part. D'autre part

   $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}=\|\overrightarrow{EK}\|\times\|\overrightarrow{EM}\|\times\cos\widehat{KEM}$. Or EHK est rectangle en H et EFM est rectangle en F donc

   $EK^2=EH^2+HK^2=a^2+(\frac{2}{3}a)^2=\frac{13a^2}{9}$ et $EM^2=EF^2+FM^2=(2a)^2+(\frac{1}{2}a)^2=\frac{17a^2}{4}$ donc

   $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}=\sqrt{\frac{13a^2}{9}}\times\sqrt{\frac{17a^2}{4}}\times\cos\widehat{KEM}=\frac{\sqrt{13}\times\sqrt{17}a^2}{6}\times\cos\widehat{KEM}$. Donc

   $\cos\widehat{KEM}=\frac{\frac{11a^2}{6}}{\frac{\sqrt{13}\times\sqrt{17}a^2}{6}}=\frac{11}{\sqrt{13}\times\sqrt{17}}\simeq 0,74$ .donc $\widehat{KEM}\simeq 42°$

Exercice 4

1. $$MA^2+MB^2=37 \iff \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=37 \iff (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=37$$
$$\iff 2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2=37 \iff 2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\vec{0}=37-IA^2-IB^2$$
$$\iff MI^2=12{,}25 \iff MI=\sqrt{12{,}25} \iff MI=3{,}5$$
Donc (E) est le cercle de centre I et de rayon 3,5.

2. $$NA^2-NB^2=-10 \iff \overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=37 \iff (\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}).(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB})=-10$$
$$\iff 2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{BA}=-10 \iff \overrightarrow{NI}.\overrightarrow{AB}=5$$
Posons H tel que $\overrightarrow{IH}=-\dfrac{\overrightarrow{AB}}{5}$. On a alors
$$\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{AB}=5 \iff (\overrightarrow{NH}+\overrightarrow{HI}).\overrightarrow{AB}=5 \iff \overrightarrow{NH}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AB}=5$$
$$\iff \overrightarrow{NH}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}^2=5 \iff \overrightarrow{NH}.\overrightarrow{AB}+5=5 \iff \overrightarrow{NH}.\overrightarrow{AB}=0$$
Donc (F) est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.