1èreS

Corrigé du devoir surveillé n°6

Exercice 1

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-2h+h^2+2-2h+1-4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h-4=-4$

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h+1}{3h-2}+\dfrac{1}{2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{5h}{2(3h-2)}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5}{2(3h-2)}=-\dfrac{5}{4}$

Exercice 2

1. $f_1'(x)=3x^2-4x$
2. $f_2'(x)=\dfrac{2x(x^2-5)-2x(x^2+5)}{(x^2-5)^2}=\dfrac{-20x}{(x^2-5)^2}$
3. $f_3'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-x)+\sqrt{x}(2x-1)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+2x\sqrt{x}-\sqrt{x}=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}(5x-3)$
4. $f_4'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2-5}}=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-5}}$
5. $f_5'(x)=\dfrac{-(-2\sin 2x)}{(\cos 2x+2)^2}=\dfrac{2\sin 2x}{(\cos 2x+2)^2}$

Exercice 3

1. $f(-1)=0$ et $f'(x)=\dfrac{(2x-3)-2(x+1)}{(2x-3)^2}=\dfrac{-5}{(2x-3)^2}$ donc $f'(-1)=-\dfrac{1}{5}$ Par suite,

   $f(-1+h)\approx f(-1)+hf'(-1)=-\dfrac{1}{5}h$ pour h proche de 0. Remarque : On peut aussi écrire

   $f(x)\approx f(-1)+(x+1)f'(-1)=-\dfrac{1}{5}(x+1)$ pour x proche de -1.

2. $f(-0{,}995)=f(-1+0{,}005)\approx-\dfrac{1}{5}(0{,}005)\approx-0{,}001$ .Or $f(-0{,}995)=\dfrac{0{,}005}{-4{,}99}\approx-0{,}001002$ Donc l'erreur commise avec l'approximation précédente est de l'ordre de 2×10^{-6} .

   $f(-1{,}002)=f(-1-0{,}002)\approx\dfrac{1}{5}(0{,}002)\approx0{,}0004$ .Or $f(-1{,}002)=\dfrac{-0{,}002}{-5{,}004}\approx0{,}0003997$ Donc l'erreur commise avec l'approximation précédente est de l'ordre de 3×10^{-7} .

Exercice 4

1. $f'(1)=f'(2)=0$ et $f'(0)=6$.
2. a) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. En remplaçant x par 0, 1, et 2 on obtient le système suivant :

   $\begin{cases}c=6\\3a+2b+c=0\\12a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=6\\3a+2b+6=0\\12a+4b+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=6\\6a+4b+12=0\\12a+4b+6=0\end{cases}$ Par soustraction des deux dernières équations, il vient $6a-6=0$ donc $a=1$ et par suite $b=-\dfrac{9}{2}$. Donc $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x+d$.

   b) $f(0)=0$ donc $d=0$ et $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x$.

Exercice 5

$A=\cos(x+\frac{\pi}{3})+\sin(x-\frac{\pi}{6})=\cos(x+\frac{\pi}{3})-\cos(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})=\cos(x+\frac{\pi}{3})-\cos(x+\frac{\pi}{3})=0$

Remarque : On peut aussi utiliser les formules de sommes

Exercice 6

1. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=6-2\sqrt{6}\sqrt{2}+2=8-2\sqrt{6}\sqrt{2}$
2. $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{16}{16}-\frac{8+2\sqrt{6}\sqrt{2}}{16}=\frac{8-2\sqrt{6}\sqrt{2}}{16}=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$. Or $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ donc

   $\cos x<0$ et $\cos x=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$