1èreS Mardi 21 avril 2009

Devoir surveillé n°9
(4 heures)

Exercice 1 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $f(x)=\frac{2x-5}{x-3}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $x\neq 3$, $f(x)=a+\frac{b}{x-3}$.
2. Tracer dans un repère orthonormal l'hyperbole représentant la fonction inverse et en déduire, en expliquant la démarche, le tracé de la courbe représentant f.

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3x^2-4x-5}{x-2}$. On appelle C sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   Quelle(s) asymptote(s) à la courbe C peut-on en déduire ?
2. Étudier les variations de la fonction f puis donner son tableau de variations.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$.
4. Justifier que la droite d'équation $y=3x+2$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$.
5. Tracer la courbe C dans un repère après avoir tracer ses asymptotes ainsi que ses éventuelles tangentes horizontales.

Exercice 3 (3 points)

Soit la fonction f définie sur par $f(x)=x^2+2x+1$ et C sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.

1. Prouver que la tangente à C au point M de C d'abscisse a , a pour équation
   $y=(2a+2)x-a^2+1$.
2. Déterminer les équations réduites des deux tangentes à C passant par le point A(0 ; – 1).
3. Tracer C et les deux tangentes.

Exercice 4 (3 points)

ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = +\frac{\pi}{2}$. BIC et CDJ sont des triangles équilatéraux tels que $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CJ}) = +\frac{\pi}{3}$.

1. Faire un figure.
2. Dans les triangles isocèles ADJ et ABI, donner la mesure principale des angles $(\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DA})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI})$.
   En déduire la mesure principale des angles $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AJ})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$.
3. Donner la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$. Que peut-on en déduire pour les points A, I et J ?

Exercice 5 (3 points)

Le triangle AOB est rectangle en O, I est le milieu de [AB] et H est le projeté orthogonal de O sur [AB]. J et K sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur (OA) et sur (OB).

1. Faire une figure
2. Montrer que $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OJ})$.
3. Montrer que $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OI} = 0$ et en déduire que les droites (OI) et (JK) sont orthogonales.

Exercice 6 (2 points)

Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ à l'aide du cercle trigonométrique.

Exercice 7 (3 points)

Soit $A(-2\ ;1)$ et $B(4\ ;-2)$ deux points du plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
On note (C) l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que : $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$.

1. Déterminer l'ensemble des points M de (C) (nature et éléments caractéristiques).
2. Déterminer une équation de la droite (AB).
3. Déterminer les points d'intersection I et J de (AB) avec (C).
4. Déterminer une équation de la tangente à (C) au point $K(2\ ;-1)$.