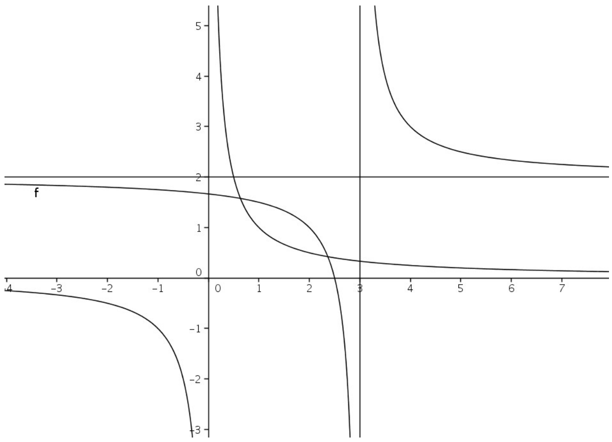
1èreS

Corrigé du devoir surveillé n°9

Exercice 1

1. $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-3}$ et $a+\dfrac{b}{x-3}=\dfrac{a(x-3)+b}{x-3}=\dfrac{ax-3a+b}{x-3}$. Il faut donc trouver a et b tels que $a=2$ et $-3a+b=-5$. On obtient $a=2$ et $b=1$ donc $f(x)=2+\dfrac{1}{x-3}$.
2. La courbe représentative de f est l'image de l'hyperbole représentant la fonction inverse par la translation de vecteur de coordonnées $(3;2)$.



Exercice 2

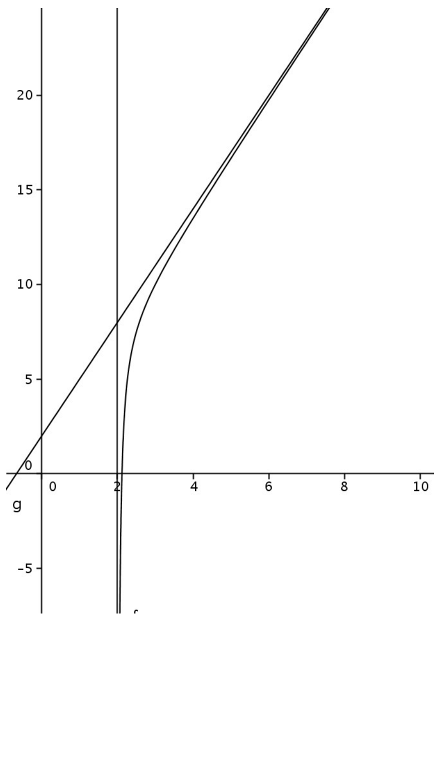
1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{3x^2-4x-5}{x-2}="\dfrac{-1}{0^+}"=-\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote à la courbe C.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-4x-5}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(3-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2})}{x(1-\frac{2}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(3-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2})}{1-\frac{2}{x}}="\frac{+\infty(3-0-0)}{1-0}"=+\infty .$$

2. $f'(x)=\dfrac{(6x-4)(x-2)-(3x^2-4x-5)}{(x-2)^2}=\dfrac{3x^2-12x+13}{(x-2)^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $3x^2-12x+25$.
Dans ce trinôme, $\Delta=-12<0$ donc il est de signe constant, positif car $3>0$.

x	2		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

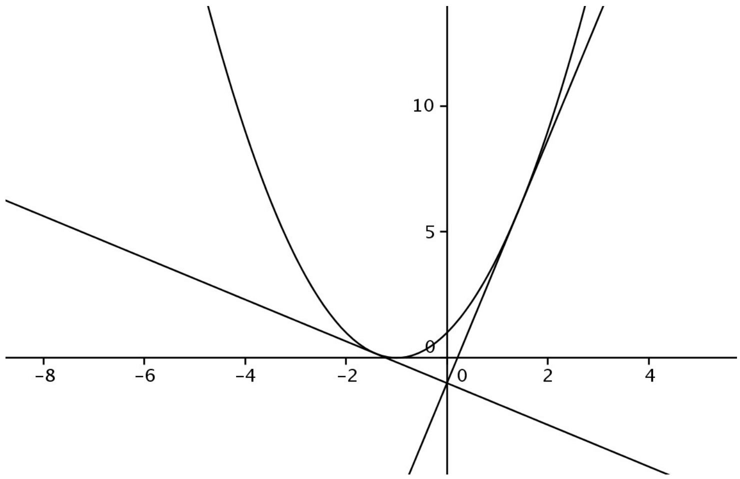
3. $f(x)=\dfrac{3x^2-4x-5}{x-2}$ Et $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{(x-2)}=\dfrac{ax^2+(-2a+b)x+(-2b+c)}{(x-2)}$. On doit donc résoudre le système $\begin{cases}a=3\\-2a+b=-4\\-2b+c=-5\end{cases}$. On obtient $\begin{cases}a=3\\b=2\\c=-1\end{cases}$ donc $f(x)=3x+2-\dfrac{1}{x-2}$



4. $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(3x+2))=\lim_{x\to+\infty}(3x+2-\frac{1}{x-2}-(3x+2))=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x-2}="\frac{-1}{+\infty}"=0$. Donc la droite d'équation $y=3x+2$ est bien asymptote (oblique) à la courbe C.

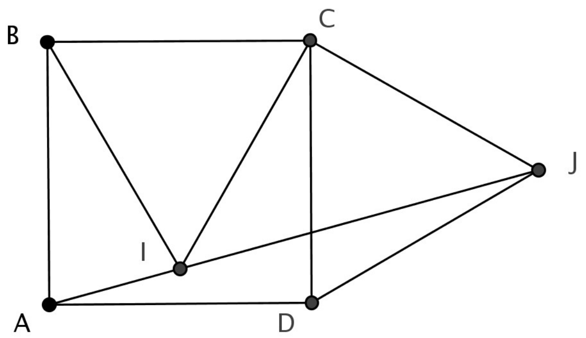
Exercice 3

1. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Or $f'(x)=2x+2$ donc l'équation de la tangente est
$y=(2a+2)(x-a)+a^2+2a+1=(2a+2)x-2a^2-2a+a^2+2a+1=(2a+2)x-a^2+1$.
2. En remplaçant x par 0 et y par -1 dans l'équation précédente on obtient $-1=-a^2+1 \Leftrightarrow a^2=2$ et donc $a=\sqrt{2}$ qui donne $y=(2\sqrt{2}+2)x-1$ ou $a=-\sqrt{2}$ qui donne $y=(-2\sqrt{2}+2)x-1$
3.



Exercice 4

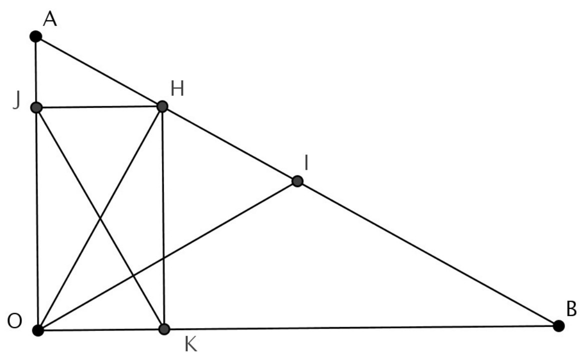
1.



2. $(\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DA})=(\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BI})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI})=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$.
Le triangle ADJ étant isocèle, $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AJ})=(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JD})$ or $(\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AJ})+(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JD})=\pi$ on a donc $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AJ})=\frac{1}{2}(\pi-\frac{5\pi}{6})=\frac{\pi}{12}$. De même, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI})=\frac{1}{2}(-\pi+\frac{\pi}{6})=-\frac{5\pi}{12}$.
3. $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI})=(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12})=\frac{\pi}{12}$. $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AJ})$ donc $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})=0$ et les points A, I et J sont alignés.

Exercice 5

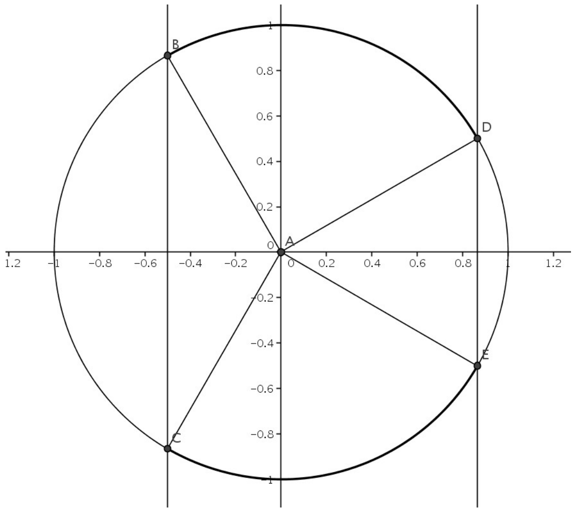
1.



2. $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OJ})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OJ})$. Or OAB est rectangle en O donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OJ}=0$ et donc $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OJ})$.
3. $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OH}=0$ car H est le projeté orthogonal de O sur (AB). Donc $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{JK}=0$ et les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 6

Dans $]-\pi;\pi]$, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ pour $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ ou $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$ et $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ou $\alpha=-\frac{\pi}{6}$. Or la fonction cosinus est croissante sur $[-\pi;0]$ et décroissante sur $[0;\pi]$ donc $-\frac{1}{2}\leq\cos x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x\in[-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}]$.



Exercice 7

1. $x^2+y^2+2x-6y-15=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2-1-9-15=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=25$. Notons E le point de coordonnées $(-1;3)$, l'équation précédente est donc équivalente $EM^2=25 \Leftrightarrow EM=5$. Il s'agit donc du cercle de centre E et de diamètre 5.
2. $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$ donc l'équation réduite de (AB) est de la forme $y=-\frac{1}{2}x+b$. En appliquant les coordonnées de A (ou de B) dans l'équation, on trouve $b=0$ donc (AB) a pour équation $y=-\frac{1}{2}x$.
3. En remplaçant y par $-\frac{1}{2}x$ dans l'équation du cercle on obtient
$x^2+(-\frac{1}{2}x)^2+2x+\frac{6}{2}x-15=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{4}x^2+2x+3x-15=0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2+5x-15=0$
$\Leftrightarrow x^2+4x-12=0$
Dans ce trinôme, $\Delta=64$ puis $x_1=-6$ et $x_2=2$. Ceci donne $I(-6;3)$ et $J(2;-1)$.
4. La tangente T est perpendiculaire au rayon au point de contact du cercle, donc $\overrightarrow{EK}$ en est un vecteur normal. $M\in T \Leftrightarrow \overrightarrow{EK}.\overrightarrow{KM}=0$ Or on a $\overrightarrow{EK}(3;-4)$ et $\overrightarrow{KM}(x-2;y+1)$ donc $M\in T \Leftrightarrow 3(x-2)-4(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x-4y-10=0$.