1èreS 1

corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1

1. $u(x)=a(x-b)^2+c=ax^2-2abx+ab^2+c$. On doit donc avoir : $\begin{cases} a=1 \\ -2ab=-8 \\ ab^2+c=9 \end{cases}$ Ce qui donne $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=-7 \end{cases}$.

   Donc $u(x)=(x-4)^2-7$.
2. u a donc les mêmes variations que la fonction carré, décalée de 4 unités. u est donc décroissante sur $]-\infty;4]$ et croissante sur $[4;+\infty[$.
3. $v(x)\leq b \Leftrightarrow x^2\leq 4 \Leftrightarrow x\in[-2;2]$. Or v est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$ donc si $x\in]-\infty;-2]$, v est décroissante et $v(x)>4$. u est croissante sur $[4;+\infty[$ donc f est décroissante sur $]-\infty;-2]$. De la même façon sur les intervalles $[-2;0]$, $[0;2]$ et $[2;+\infty[$, on obtient :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-7 ↗	9 ↘	-7 ↗	$+\infty$

Exercice 2

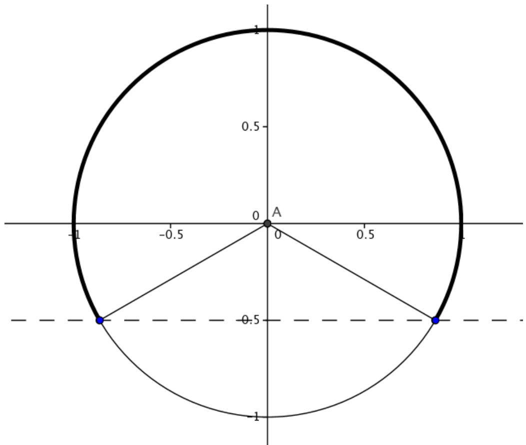
$(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi=\frac{6\pi}{5}(2\pi)$ donc $(\vec{u},-\vec{v})=\frac{-4\pi}{5}$

$(\vec{v},-\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})=-\frac{\pi}{5}$

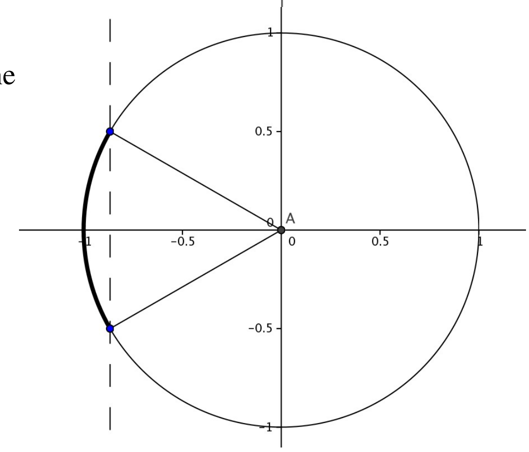
$(2\vec{w},-\vec{u})=(\vec{w},-\vec{u})=(\vec{w},\vec{u})+\pi=-(\vec{u},\vec{w})+\pi=\frac{12\pi}{5}(2\pi)$ donc $(\vec{w},-\vec{u})=\frac{2\pi}{5}$

$(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})-(\vec{u},\vec{v})=-\frac{8\pi}{5}(2\pi)$ donc $(\vec{v},\vec{w})=\frac{2\pi}{5}$

Exercice 3



1. L'équation $\sin x=-\frac{1}{2}$ équivaut à $\sin x=\sin(-\frac{\pi}{6})$ et donne $x=-\frac{\pi}{6}(2\pi)$ ou $x=\pi-(-\frac{\pi}{6})(2\pi)$, c'est-à-dire $x=-\frac{\pi}{6}$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}$ en mesure principale. En examinant le sens de variation de la fonction sinus sur $]-\pi;\pi]$ ou en regardant le cercle trigonométrique on obtient que $\sin x>-\frac{1}{2}$ pour $x\in]-\pi;-\frac{5\pi}{6}[\cup]-\frac{\pi}{6};\pi]$.



2. L'équation $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $\cos x=\cos(\frac{5\pi}{6})$ et donne $x=\frac{5\pi}{6}$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}$ en mesure principale. En examinant le sens de variation de la fonction cosinus sur $]-\pi;\pi]$ ou en regardant le cercle trigonométrique on obtient que $\sin x\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x\in]-\pi;-\frac{5\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6};\pi]$

Exercice 4

1. $\sin x = -\cos x \Leftrightarrow \sin x = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) \Leftrightarrow \sin x = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ ce qui donne :

   $x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \pi - (x - \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$ c'est-à-dire $0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc pas de solutions ici ou

   $2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ et sur $[0; 2\pi[$ on a donc les solutions $x = \frac{3\pi}{4} (k=0)$ et

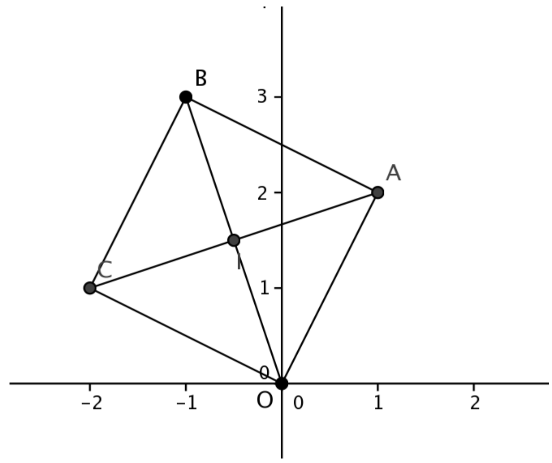
   $x = \frac{7\pi}{4} (k=1)$

2. $\tan(2x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$ ce qui donne :

   $2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi$ ou $2x = \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) + 2k\pi$ c'est-à-dire $0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc pas de solutions ici ou

   $4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi$ et sur $[0; 2\pi[$ on a donc les solutions $x = \frac{\pi}{8} (k=0)$, $x = \frac{5\pi}{8} (k=1)$, $x = \frac{9\pi}{8} (k=2)$ et $x = \frac{13\pi}{8} (k=3)$.

Exercice 5



1. voir figure
2. Dans le carré OABC, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4}$. Par ailleurs, $OB = \sqrt{2}\, OA$ donc $OC = OA = \frac{1}{\sqrt{2}} OB = \frac{\sqrt{2}}{2} OB = \frac{\sqrt{2}}{2} r$. Donc les coordonnées polaires de A sont $(\frac{\sqrt{2}}{2} r ; \theta - \frac{\pi}{4})$ et celles de C sont $(\frac{\sqrt{2}}{2} r ; \theta + \frac{\pi}{4})$.
3. Les cordonnées cartésiennes de A sont donc

   $x_A = r\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = r\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4}) = r\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\theta\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{r}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$ et

   $y_A = r\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = r\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}) = r\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\theta\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{r}{2}(\sin\theta - \cos\theta)$.

   De la même manière, celles de C sont

   $x_C = r\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{r}{2}(\cos\theta - \sin\theta)$ et $y_C = r\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{r}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$.
4. $r = \sqrt{((-1)^2 + 3^2)} = \sqrt{10}$. $\cos\theta = \frac{x_B}{r} = \frac{-1}{r} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$ et $\sin\theta = \frac{y_B}{r} = \frac{3}{r} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ donc on a

   $x_A = \frac{r}{2}(\frac{-1}{r} + \frac{3}{r}) = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $y_A = \frac{r}{2}(\frac{3}{r} - \frac{-1}{r}) = \frac{3+1}{2} = 2$ donc $A(1; 2)$ et

   $x_C = \frac{r}{2}(\frac{-1}{r} - \frac{3}{r}) = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $y_C = \frac{r}{2}(\frac{3}{r} + \frac{-1}{r}) = \frac{3-1}{2} = 1$ donc $C(-2; 1)$.

   Remarque : Il vaut mieux utiliser l'expression en fonction de r qui va se simplifier.