1èreS1

corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1

1. $\begin{cases} x+y=\dfrac{21}{2} \\ xy=5 \end{cases}$ La première équation donne $y=-x+\dfrac{21}{2}$ et en remplaçant dans la seconde on obtient :
$x(-x+\dfrac{21}{2})=5 \Leftrightarrow -x^2+\dfrac{21}{2}x-5=0=5 \Leftrightarrow 2x^2-21x+10=0$ Cette équation a deux solutions, $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=10$. On a donc deux couples solution, $(\dfrac{21}{2};10)$ et $(10;\dfrac{21}{2})$.
2. $\begin{cases} x-y=7 \\ xy=18 \end{cases}$ La première équation donne $y=x-7$ et en remplaçant dans la seconde on obtient :
$x(x-7)=18 \Leftrightarrow x^2-7x-18=0$ Cette équation a deux solutions, $x_1=-2$ et $x_2=9$. On a donc deux couples solution, $(-2;-9)$ et $(9;2)$.

Exercice 2

Appelons n le nombre d'enfants de l'homme. On a donc $\dfrac{720\,000}{n}$ pour chaque enfant. Si on distribue a 5 enfants de moins il-y-a donc $\dfrac{720\,000}{n-5}$ pour chacun. On doit donc résoudre l'équation

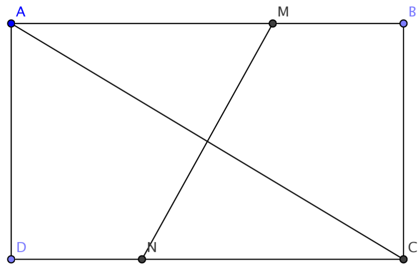
$\dfrac{720\,000}{n-5}=\dfrac{720\,000}{n}+2000 \Leftrightarrow \dfrac{360}{n-5}=\dfrac{360}{n}+1 \Leftrightarrow \dfrac{360n-360(n-5)-n(n-5)}{n(n-5)}=0$

$\Leftrightarrow -n^2+5n+1800=0$

(Car ni 0 ni 5 n'annulent le numérateur)

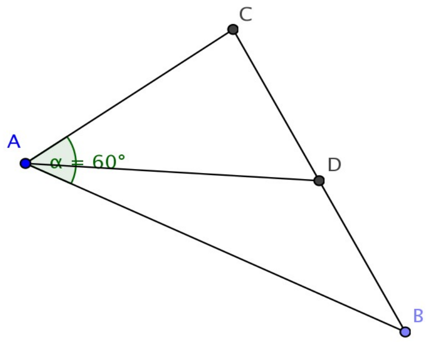
Pour cette dernière équation, on trouve $\Delta=7225=85^2$ puis $x_1=45$ et $x_2=-40$. on peut donc conclure que cet homme a 45 enfants. C'est beaucoup.

Exercice 3



1. Voir ci-contre
2. $\vec{AC}.\vec{MN}=(\vec{AB}+\vec{AD}).(\vec{AN}-\vec{AM})=(\vec{AB}+\vec{AD}).(\vec{AD}+\vec{DN}-\vec{AM})$
$=\vec{AB}.\vec{AD}+\vec{AB}.\vec{DN}-\vec{AB}.\vec{AM}+\vec{AD}^2+\vec{AD}.\vec{DN}-\vec{AD}.\vec{AM}$
$=\vec{AB}.\vec{DN}-\vec{AB}.\vec{AM}+\vec{AD}^2=\dfrac{1}{3}a^2-\dfrac{2}{3}a^2+16=-\dfrac{1}{3}a^2+16$
3. (AC) et (MN) perpendiculaires équivaut à $\vec{AC}.\vec{MN}=0$ c'est-à-dire $-\dfrac{1}{3}a^2+16=0 \Leftrightarrow a=4\sqrt{3}$ (car $a>0$).
Dans ce cas, on a AM = $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. $AN=\sqrt{4^2+(\dfrac{4\sqrt{3}}{3})^2}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ et $\vec{MN}=\vec{AD}+\vec{DN}-\vec{AM}=\vec{AD}-\dfrac{1}{3}\vec{AB}$ donc AMN est équilatéral.

Exercice 4



1. Voir ci-contre
2. $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos(\vec{AB},\vec{AC})$
$=25+9-2\times5\times3\times\cos\dfrac{\pi}{3}=19$
Donc $BC=\sqrt{19}$. $AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{1}{2}BC^2$. Donc
$2AI^2=AB^2+AC^2-\dfrac{1}{2}BC^2=25+9-\dfrac{19}{2}=\dfrac{49}{2}$ puis $AI^2=\dfrac{49}{4}$
donc $AI=\dfrac{3}{2}$.

Exercice 5

1. Voir ci-dessous.
2. $\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{(-2-2)^2+(1-5)^2}=4\sqrt{2}$ et $\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{(4-2)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{5}$.
   $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=(-2-2)(4-2)+(1-5)(1-5)=8$.
3. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|\times\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ donc $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|}=\dfrac{8}{4\sqrt{2}\times2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\approx0{,}316$.
   Donc $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\approx71{,}6\,°$.
4. La droite médiatrice de $[AB]$ est la perpendiculaire à $[AB]$ passant par son milieu. Nommons C' le milieu de $[AB]$, on a $\widehat{AB}(6;0)$ et $C'(1;1)$. $M(x;y)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$ équivaut à $\overrightarrow{MC'}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow 6(x-1)+0(y-1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$.
   Pour la médiatrice de [AC] on trouve $4x+4(y-3)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$.
   Pour trouver les coordonnées de I, il faut donc résoudre le système $\begin{cases}x-1=0\\x+y-3=0\end{cases}$. On trouve $I(1;2)$.
5. M(x;y) appartient au cercle circonscrit à ABC équivaut à $IM=IA \Leftrightarrow IM^2=IA^2$ ce qui donne $(x-1)^2+(y-2)^2=3^2+1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-5=0$.