1èreS2

corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1

$\frac{2x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}<6 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x+1)+3(x-1)}{(x+1)(x-1)}<\frac{6(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \Leftrightarrow \frac{2x^2+3x+1+3x-3}{(x+1)(x-1)}<\frac{6(x^2-1)}{(x+1)(x-1)}$

$\Leftrightarrow \frac{-4x^2+6x+4}{(x+1)(x-1)}<0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-2}{(x+1)(x-1)}>0$

pour $2x^2-3x-2$, $\Delta=9+16=25$ puis $x_1=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3+5}{4}=2$. On a donc

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2-3x+2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Q		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-1[\cup]-\frac{1}{2};1[\cup]2;+\infty[$

Exercice 2

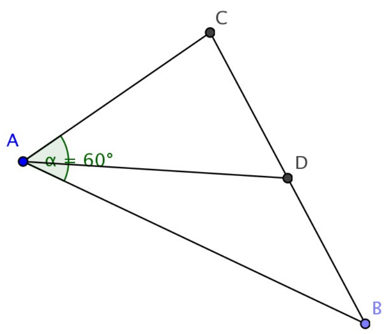
notons v la vitesse moyenne sur la première partie. Le temps mis pour la première partie est donc $\frac{160}{v}$. Sur la deuxième partie, la vitesse moyenne est v-40 et le temps mis est donc $\frac{40}{v-40}$. On a donc $\frac{160}{v}+\frac{40}{v-40}=3 \Leftrightarrow 160(v-40)+40v=3v(v-40) \Leftrightarrow -3v^2-320v-6400=0$ Cette équation a deux solutions, $x_1=\frac{-320-160}{-6}=80$ et $x_2=\frac{-320+160}{-6}=\frac{80}{3}$. Or la seconde valeur donne une vitesse négative sur la seconde partie du trajet donc la valeur cherchée est v=80. La vitesse moyenne était donc de $80\,\text{kmh}^{-1}$ sur la première partie et de $40\,\text{kmh}^{-1}$ sur la seconde.

Exercice 3

1. $\vec{w}.\vec{u}=(\vec{u}-\vec{v}).\vec{u}=\vec{u}^2-\vec{v}.\vec{u}=2^2-(-7)=11$ et
   $\vec{w}^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=2^2-2\times(-7)+5^2=43$.

2. $\vec{w}.\vec{u}=|\vec{w}|\times|\vec{u}|\times\cos(\vec{w},\vec{u})$ donc
   $\cos(\vec{w},\vec{u})=\frac{\vec{w}.\vec{u}}{|\vec{w}|\times|\vec{u}|}=\frac{11}{2\sqrt{43}}\approx 0{,}839$. Donc $(\vec{w},\vec{u})\approx 33°$

Exercice 4



1. Voir ci-contre
2. $BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
   $=25+9-2\times5\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=19$
   Donc $BC=\sqrt{19}$.
   $AB^2+AC^2=2\,AI^2+\frac{1}{2}BC^2$. Donc
   $2\,AI^2=AB^2+AC^2-\frac{1}{2}BC^2=25+9-\frac{19}{2}=\frac{49}{2}$ puis $AI^2=\frac{49}{4}$ donc $AI=\frac{3}{2}$.

Exercice 5

1. $x^2+y^2-10x+4y-20=0 \Leftrightarrow (x-5)^2-25+(y+2)^2-4-20=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+2)^2=49$. Si on pose $M(x;y)$ et $\Omega(5;-2)$, l'équation devient $OM^2=7^2 \Leftrightarrow OM=7$. C est donc le cercle de centre $\Omega(5;-2)$ et de rayon 7.
2. Il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} x^2+y^2-10x+4y-20=0 \\ 2x+y-15=0 \end{cases}$. La seconde équation donne $y=-2x+15$ et par substitution dans la première on obtient :
   $x^2+(-2x+15)^2-10x+4(-2x+15)-20=0 \Leftrightarrow 5x^2-78x+265$.
   Pour cette équation on trouve $\Delta=784$ puis $x_1=5$ et $x_2=\dfrac{106}{10}$ Ce qui donne $A(5;5)$ et $B(\dfrac{106}{10};-\dfrac{31}{5})$.
3. $(-2)^2+(-2)^2-10\times(-2)+4\times(-2)-20=0$ donc $D\in C$.
4. $\|\overrightarrow{DA}\|=\sqrt{(5-(-2))^2+(5-(-2))^2}=7\sqrt{2}$ et $\|\overrightarrow{DB}\|=\sqrt{(10{,}6-(-2))^2+(-6{,}2-(-2))^2}=\sqrt{176{,}4}=6\sqrt{4{,}9}$.
   $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=(5-(-2))(10{,}6-(-2))+(5-(-2))(-6{,}2-(-2))=58{,}8$.
5. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=\|\overrightarrow{DA}\|\times\|\overrightarrow{DB}\|\times\cos(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})$ donc
   $\cos(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})=\dfrac{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}}{\|\overrightarrow{DA}\|\times\|\overrightarrow{DB}\|}=\dfrac{58{,}8}{7\sqrt{2}\times6\sqrt{4{,}9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\approx0{,}447$.
   Donc $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\approx-63{,}4\,°$.
6. L'aire de ADB est $\dfrac{1}{2}DA\times DB\sin\widehat{ADB}$. Or $\sin^2\widehat{ADC}+\cos^2\widehat{ADC}=1$ donc $\sin\widehat{ADC}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Donc
   $A_{ADC}=\dfrac{1}{2}\times7\sqrt{2}\times6\sqrt{4{,}9}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=58{,}8$.