1èreS2

corrigé du devoir surveillé n°9

Exercice 1

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x+1=\text{"}+\infty+\infty+1\text{"}=+\infty$

b. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \dfrac{2x}{x^2-4}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \dfrac{2x}{(x-2)(x+2)}=\text{"}\dfrac{-4}{-4\times0^-}\text{"}=-\infty$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-5}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(4-\frac{5}{x})}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\dfrac{4-0}{1-0}=4$

d. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x+1}{x-1}=\text{"}\dfrac{2}{0^+}\text{"}=+\infty$

Exercice 2

1. La droite d'équation $x=1$ est asymptote signifie que $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ ce qui n'est possible que si la fonction n'est pas définie pour $x=1$ donc $c=1$. $f(x)=\dfrac{x^2(a+\frac{b}{x})}{2x^2(1-\frac{c}{x^2})}=\dfrac{a+\frac{b}{x}}{2(1-\frac{c}{x^2})}$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{a+0}{2(1-0)}=\dfrac{a}{2}$. Par ailleurs, La droite d'équation $y=\dfrac{3}{2}$ est asymptote donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$ et donc $a=3$. La droite d'équation $y=-2x$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 0 signifie que $f'(0)=-2$. Or $f'(0)=\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0} \dfrac{ah+b}{2(h-c)^2}=\dfrac{b}{2c^2}=\dfrac{b}{2}$ donc $b=-4$.
2. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$ (voir 1). $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x(3x-4)}{2(x-1)^2}=\text{"}\dfrac{1\times(-1)}{2\times0^+}\text{"}=-\infty$.

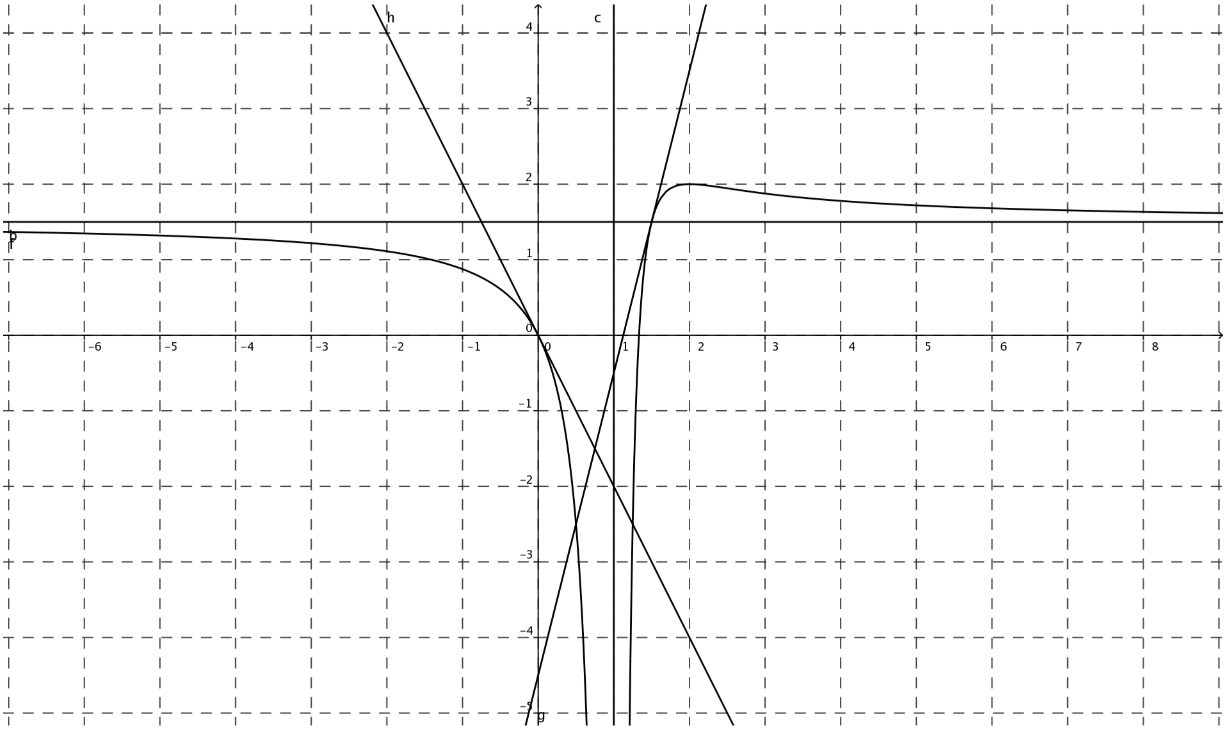
   b. $f'(x)=\dfrac{2(6x-4)(x-1)^2-4x(3x-4)(x-1)}{4(x-1)^4}=\dfrac{(3x-2)(x-1)-x(3x-4)}{(x-1)^3}=\dfrac{-x+2}{(x-1)^3}$. On obtient :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$ ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2	↘	$\frac{3}{2}$

   c. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y=-2x$ (voir 1). Celle de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ est $y=f'(\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})+f(\frac{3}{2})$ ce qui donne $y=4(x-\frac{3}{2})+\frac{3}{2}$ ou $y=4x-\dfrac{9}{2}$.

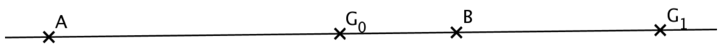
   d. $f(x)-\dfrac{3}{2}=\dfrac{x(3x-4)}{2(x-1)^2}-\dfrac{3(x-1)^2}{2(x-1)^2}=\dfrac{2x-3}{2(x-1)^2}$ donc $f(x)-\dfrac{3}{2}>0$ si $x>\dfrac{3}{2}$ et dans ce cas la courbe est au-dessus de l'asymptote, elle est en dessous si $x<\dfrac{3}{2}$.

   e. Voir après.
3. La droite $D_{-\frac{9}{2}}$ est tangente à la courbe. On remarque que si $m<-\dfrac{9}{2}$, D_m coupe la courbe en trois points donc l'équation $f(x)=4x+m$ a trois solutions. Si $m=-\dfrac{9}{2}$ il y a deux solutions et si $m>-\dfrac{9}{2}$ il y a une seule solution.



Exercice 3

1. G_0 est le barycentre de $(A,2)$ et $(B,5)$ donc
$2\overrightarrow{G_0A}+5\overrightarrow{G_0B}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_0A}+5(\overrightarrow{G_0A}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{G_0A}=-5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_0}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ et de même, G_1 est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,-3)$ donc $\overrightarrow{G_1A}-3\overrightarrow{G_1B}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$



Exercice 4

1. $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=3(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ et $2+(-3)\neq 0$ donc G est le barycentre de $(A,2)$ et $(B,-3)$.
2. $\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG}+2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB})=\vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ et $-2+1\neq 0$ donc G est le barycentre de $(A,-2)$ et $(B,1)$.