1èreS

corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1

a. $3x^2-5x-2=0$

$\Delta=(-5)^2-4\times3\times(-2)=49$ puis $x_1=\dfrac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times3}=-\dfrac{1}{3}$ et $x_2=\dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times3}=2$.

b. $x^2-x+3=0$

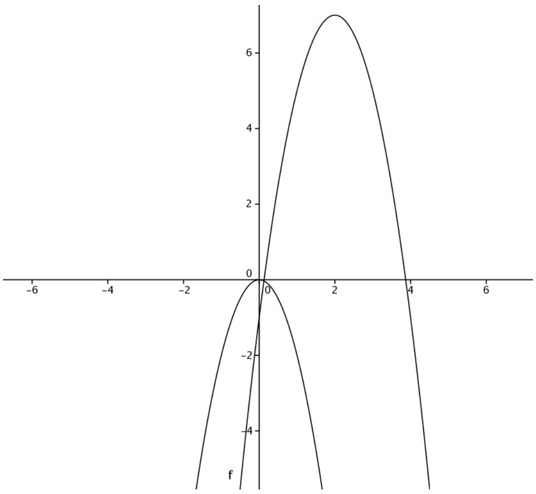
$\Delta=(-1)^2-4\times1\times3=-11$. $\Delta<0$ donc l'équation n'a pas de solutions.

c. $-x^2+3x-4=0$

$\Delta=3^2-4\times(-1)\times(-4)=-7$ donc l'équation n'a pas de solutions.

d. $-4x^2+12x-9=0$

$\Delta=12^2-4\times(-4)\times(-9)=0$ donc $x=\dfrac{-12}{2\times(-4)}=\dfrac{3}{2}$



Exercice 2

1. $-2x^2+8x-1=-2(x^2-4x)-1=-2(x-2)^2+7$ **.**
2. La courbe représentative de f est l'image de celle de la fonction $x\to-2x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u}(2;7)$.
3. Voir ci-contre.

Exercice 3

1. $\sin(x+\dfrac{\pi}{6})=\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x$ et

$\cos(x+\dfrac{\pi}{6})=\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x$.

2. a. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0 \iff \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x=0 \iff \sin(x+\dfrac{\pi}{6})=\sin 0$ ce qui donne

$x+\dfrac{\pi}{6}=0+k\pi$ donc les solutions de l'équation sur $]-\pi;\pi]$ sont 0 et π .

b. $\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin x=1 \iff \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{3}{6}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x+\dfrac{\pi}{6})=\cos\dfrac{\pi}{6}$ ce qui donne

$x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \iff x=2k\pi$ ou $x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \iff x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

Les solutions de l'équation sur $]-\pi;\pi]$ sont donc 0 et $-\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 4

1. Comme ABC est un triangle équilatéral direct de centre O, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})$. Or $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA})=0(2\pi)$ donc $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\dfrac{2\pi}{3}$ et donc

$(\vec{i},\overrightarrow{OB})=(\vec{i},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\theta+\dfrac{2\pi}{3}$ Par ailleurs, $OB=OA=r$ donc les coordonnées polaires de B sont r et $\theta+\dfrac{2\pi}{3}$.

2. $x_B=r\cos(\theta+\dfrac{2\pi}{3})=r(\cos\theta\cos\dfrac{2\pi}{3}-\sin\theta\sin\dfrac{2\pi}{3})=r(-\dfrac{1}{2}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)$ et

$y_B=r\sin(\theta+\dfrac{2\pi}{3})=r(\sin\theta\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{2\pi}{3})=r(-\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)$

3. a. Si on a $A(1;3)$ alors $\cos\theta=\frac{1}{r}$ et $\sin\theta=\frac{3}{r}$ donc $x_B=r(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{r}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{r})=\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$ et $y_B=r(-\frac{1}{2}\times\frac{3}{r}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{r})=\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$.

   b. On doit avoir $x_B=-1 \Leftrightarrow 2\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})=-1 \Leftrightarrow \cos(\theta+\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}$ ce qui amène à $\theta+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}(2\pi)$ donc $\theta=0$ ou $\theta+\frac{2\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}(2\pi)$ donc $\theta=\frac{2\pi}{3}$ $(-\frac{4\pi}{3}+2\pi)$. Dans le premier cas, on obtient $A(2;0)$ et dans le second $A(-1;-\sqrt{3})$.

Exercice 5

Partie A

1. $\sin(3\theta)=\sin(2\theta+\theta)=\sin(2\theta)\cos\theta+\cos(2\theta)\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$
   $=2\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta=2\sin\theta-2\sin^3\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta$
   $=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$
2. D'une part, $\sin(3\times\frac{\pi}{18})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. D'autre part, $\sin(3\times\frac{\pi}{18})=-4\sin^3\frac{\pi}{18}+3\sin\frac{\pi}{18}$ donc $-4\sin^3\frac{\pi}{18}+3\sin\frac{\pi}{18}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -8\sin^3\frac{\pi}{18}+6\sin\frac{\pi}{18}-1=0$ donc $\sin\frac{\pi}{18}$ est solution de l'équation $-8x^3+6x-1=0$.
3. $\lambda=2\sin(\frac{\pi}{18})$ donc $\sin\frac{\pi}{18}=\frac{\lambda}{2}$ donc $-8(\frac{\lambda}{2})^3+6(\frac{\lambda}{2})-1=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+3\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda^3-3\lambda+1=0$
   λ est donc bien solution de l'équation $x^3-3x+1=0$.

Partie B

1. $f_1(x)=f(x)-1=x^3-3x+1-1=x^3-3x$ donc $f_1(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-f_1(x)$ donc f_1 est impaire.
2. $g(x)=f(x-1)=(x-1)^3-3(x-1)+1=x^3-3x^2+3x-1-3x+3+1=x^3-3x^2+3$.
3. La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty;0]$ donc la fonction $x\to-3x^2+1$ est croissante sur cet intervalle. La fonction cube est croissante. g est la somme de deux fonctions croissantes sur $]-\infty;0]$ donc elle est croissante sur $]-\infty;0]$. Comme $g(x)=f(x-1)$, on peut dire que les variations de f sur $]-\infty;-1]$ sont les mêmes que celles de g sur $]-\infty;0]$ donc f est croissante sur $]-\infty;-1]$.
4. $f_1(x)=f(x)-1$ donc les variations de f_1 sont les mêmes que celles de f donc f_1 est croissante sur $]-\infty;-1]$. Comme f_1 est impaire, on en conclut que f_1 est aussi croissante sur $[1;+\infty[$ et donc f aussi.
5. $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-3x_2+1-(x_1^3-3x_1+1)=x_2^3-x_1^3-3x_2+3x_1$
   $=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_2^2)-3(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_2^2-3)$
   Or si $-1\leq x_1<x_2\leq 1$, on a $x_1^2\leq 1$, $x_2^2\leq 1$ et $x_1x_2\leq 1$ donc $x_2^2+x_1x_2+x_2^2-3\leq 0$ et comme $x_2-x_1>0$ on a bien $f(x_2)-f(x_1)\leq 0$. $-1\leq x_1<x_2\leq 1 \Rightarrow f(x_2)\leq f(x_1)$ donc f est décroissante sur $[-1;1]$. Par suite on a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

6. Par lecture du tableau de variations, on peut dire que l'équation $f(x)=0$ a trois solutions α_1 , α_2 et α_3 . A l'aide d'un tableau de valeurs, ou par tâtonnement on trouve $f(-1{,}88)<0<f(-1{,}87)$ donc $-1{,}88<\alpha_1<-1{,}87$ puis $f(0{,}34)>0>f(0{,}35)$ donc $0{,}34<\alpha_2<0{,}35$ et $f(1{,}53)<0<f(1{,}54)$ donc $1{,}53<\alpha_3<1{,}54$.
7. On a $0<\sin\frac{\pi}{18}<\frac{1}{2}$ donc $\lambda=\alpha_2\approx 0{,}35$