1èreS

corrigé du devoir surveillé n°6

Exercice 1

1. On doit avoir $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+a=1$ ce qui donne $a=\frac{1}{16}$.
2. On doit avoir $\frac{1}{2}-a^2+a+1-\frac{a}{2}=1 \Leftrightarrow 2a^2-a-1=0$. Cette équation a deux solutions, 1 et $-\frac{1}{2}$ mais dans les deux cas on n'obtient pas des nombres appartenant tous à $[0;1]$, donc il n'y a pas de solutions.

Exercice 2

Les probabilités d'apparition des faces sont proportionnelles aux nombres 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{6}$. On cherche donc un nombre k tel que $k+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}+\frac{k}{5}+\frac{k}{6}=1 \Leftrightarrow k=\frac{60}{147}=\frac{20}{49}$ et c'est aussi la probabilité cherchée.

Exercice 3

1. $f'_1(x)=6x-6$
2. $f'_2(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$
3. $f'_3(x)=\frac{(6x+2)(x+1)-1(3x^2+2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+6x+3}{(x+1)^2}=\frac{3(x+1)^2}{(x+1)^2}=3$.

   Remarque : On avait aussi $f_3(x)=\frac{(3x-1)(x+1)}{x+1}=3x-1$.
4. $f'_4(x)=5\times5(5x-4)^4=25(5x-4)^4$
5. $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ donc la dérivée de $x\to\tan x$ est $x\to\frac{\cos x\times\cos x-(-\sin x\times\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$ et donc,

   $f'_5(x)=\frac{2}{\cos^2(2x+\frac{\pi}{2})}=\frac{2}{\sin^2(2x)}$

Exercice 4

1. $f'(-2)=f'(4)=1$ et $f'(-1)=f'(3)=0$.
2. $f'(x)\leq0$ pour $x\in[-1;3]$ et $f'(x)>1$ pour $x\in[-4;-2[\cup]4;7]$

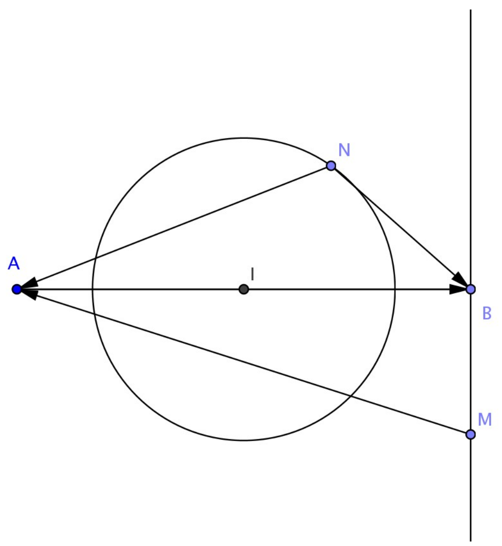
Exercice 5

4,002 est proche de 4 donc on va don chercher une approximation affine de la fonction racine carrée pour x pour un nombre proche de 4. Si $f(x)=\sqrt{x}$, alors $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc pour h proche de 0 on a

$f(4+h)\approx f(4)+hf'(4)$ c'est-à-dire $f(4+h)\approx2+\frac{h}{4}$. pour h = 0,002 on obtient $\sqrt{4{,}002}\approx2{,}0005$. La calculatrice donne $\sqrt{4{,}002}\approx2{,}0004999375$ donc l'erreur commise est inférieure à 10^{-7}.

Exercice 6

1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=-36 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{AB}=-36 \Leftrightarrow$
   $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}=-36 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB}=0$.
   L'ensemble des point M cherché est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.
2. $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB}=-5 \Leftrightarrow (\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB})=-5 \Leftrightarrow$
   $NI^2+\overrightarrow{NI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$
   or I et le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=-9$. donc $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB}=-5 \Leftrightarrow NI^2=4$.
   L'ensemble des points N cherché est donc le cercle de centre I et de rayon 2



Exercice 7

1. Voir ci-dessous.
2. On a $\overrightarrow{BA}(-8;-6)$ et $\overrightarrow{BC}(\frac{9}{2};-6)$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-8\times\frac{9}{2}+(-6)\times(-6)=0$ et ABC est rectangle en B. On a $\overrightarrow{BD}(-6;-\frac{9}{2})$ donc $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}=0$ et $\|\overrightarrow{BD}\|=\|\overrightarrow{BC}\|$ et DBC est isocèle et rectangle en B. On a $\overrightarrow{CE}(-\frac{15}{2};0)$ donc $\|\overrightarrow{CE}\|=\|\overrightarrow{CB}\|$ et EBC est isocèle en C. ABC et DBC sont rectangles en B, donc D appartient à la droite (AB) et la bissectrice de $\widehat{ABC}$ est aussi celle de $\widehat{DBC}$. De plus DBC est isocèle en B donc cette bissectrice est aussi la hauteur issue de B, donc elle est perpendiculaire à (DC) et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est bien normal à b_1. De même pour EBC après avoir remarqué que $\overrightarrow{CE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CA}$.
3. $(CD)\perp(BN) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BN}=0 \Leftrightarrow -\frac{21}{2}(x-\frac{3}{2})+\frac{3}{2}(y-\frac{9}{2})=0 \Leftrightarrow 7x-y-6=0$ qui est donc l'équation de b_1. $(BE)\perp(CN) \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CN}=0 \Leftrightarrow -3(x-6)-6(y+\frac{3}{2})=0 \Leftrightarrow x+2y-3=0$ qui est l'équation de b_2.
4. Il s'agit de résoudre le système $\begin{cases}7x-y-6=0\\x+2y-3=0\end{cases}$ qui donne comme solution $M(1;1)$.
5. $H\in(AB)$, donc $\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}$ et on peux écrire $x_H-x_A=k(x_B-x_A)$ ce qui donne $x_H=8k-\frac{13}{2}$ et de même on a $y_H=6k-\frac{3}{2}$. Par ailleurs, $(MH)\perp(AB)$ donc $8(x_H-1)+6(y_H-1)=0$ donc, $8(8k-\frac{13}{2}-1)+6(6k-\frac{3}{2}-1)=0 \Leftrightarrow 100k-75=0 \Leftrightarrow k=\frac{3}{4}$ ce qui donne $H(-\frac{1}{2};3)$. De la même façon, on trouve $F(3;\frac{5}{2})$ et $G(1;-\frac{1}{2})$.
6. On a $MF=MG=MH=\frac{5}{2}$ donc le cercle de centre M passant par F passe aussi par G et H. de plus, par construction, $(MF)\perp(BC)$, $(MG)\perp(AC)$ et $(MH)\perp(AB)$ donc le cercle de centre M passant par F est tangent aux droites (BC), (AC) et (AB) respectivement en F, G et H.
7.