1èreS

corrigé du devoir surveillé n°8

Exercice 1

1. a) $h(-x)=-\frac{3}{-x}=-(-\frac{3}{x})=-h(x)$ Donc h est impaire.

   b) $h(x)=-3\times\frac{1}{x}$ donc les variations de h sont contraires à celle de la fonction inverse et on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

2. a) $g(x)=\frac{2x+3}{x+3}=\frac{2(x+3)-3}{x+3}=2-\frac{3}{x+3}=u\circ h\circ v(x)$ avec $u(x)=2+x$ et $v(x)=x+3$.

   b) C_g est donc l'image de C_h par la translation de vecteur de coordonnées $(-3;2)$.

   c) On a donc :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$h(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Exercice 2

$f(0)=3$ implique que $c=3$ et $f'(x)=2ax+b$ donc $f'(0)=2$ implique $b=2$ donc $f(x)=ax^2+2x+3$ et $f'(x)=2ax+2$. Si f atteint son maximum en x_0 , il faut que $f'(x_0)=0$ c'est-à-dire $2ax_0+2=0$ donc $x_0=-\frac{1}{a}$ or $f(-\frac{1}{a})=\frac{1}{a}-\frac{2}{a}+3=-\frac{1}{a}+3$ donc il faut que $-\frac{1}{a}+3=4$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{a}=1$ donc $a=-1$. Comme $a>0$, le somment de la parabole représentant cette fonction correspond bien a un maximum et on a effectivement $f(x)=-x^2+2x+3$.

Exercice 3

1. On a $\vec{u}(1;1;-1)$, $\vec{v}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{AB}(0;-1;2)$. Montrons que ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires. On va chercher s'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ c'est-à-dire tels que : $\begin{cases}0=\alpha-\beta\\-1=\alpha+\beta\\2=-\alpha\end{cases}$ La dernière équation donne $\alpha=-2$ puis la première $\beta=-2$ mais alors la seconde n'est pas satisfaite. Le système n'a donc pas de solution et il n'existe pas de réels tels que $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.
   Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas coplanaires.

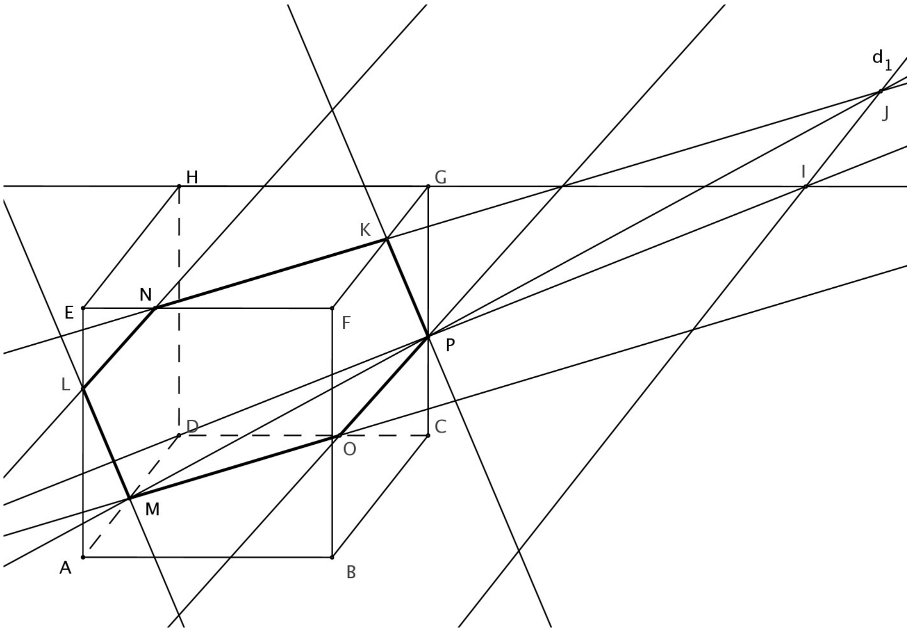
2. $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ donc $\begin{cases}x_M=k-1\\y_M=k+1\\z_M=-k+2\end{cases}$ et $\overrightarrow{BN}=k'\vec{u}$ donc $\begin{cases}x_N=-k'-1\\y_N=k'\\z_N=4\end{cases}$. Or
   $MN^2=(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2+(z_N-z_M)^2=(-k'-k)^2+(k'-k-1)^2+(2+k)^2$
   $=k'^2+2kk'+k^2+k'^2+k^2+1-2kk'-2k'+2k+4+4k+k^2=3k^2+6k+2k'^2-2k'+5$. De plus
   $3(k+1)^2+2(k'-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}=3k^2+6k+2k'^2-2k'+5$ donc $MN^2=3(k+1)^2+2(k'-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$.

3. quels que soient k et k' , $3(k+1)^2\geq 0$ et $2(k'-\frac{1}{2})^2\geq 0$ donc $MN^2\geq\frac{3}{2}$. Or pour $k=-1$ et $k'=\frac{1}{2}$ on a $MN^2=\frac{3}{2}$ pour $(k;k')\neq(-1:\frac{1}{2})$ on a $MN^2>\frac{3}{2}$ donc $k_0=-1$ et $k'_0=\frac{1}{2}$.

4. On a $M_0(-2;0;3)$ et $N_0(-\frac{3}{2};\frac{1}{2};4)$ donc $\overrightarrow{M_0N_0}(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1)$ puis $\overrightarrow{M_0N_0}.\vec{u}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$ et $\overrightarrow{M_0N_0}.\vec{v}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ ce qui répond à la question posée.

Exercice 4

1. $P\in[GC]$ donc $P\in(HGC)$, or $D\in(HGC)$ donc (DP) et (HG) sont coplanaires et non parallèles donc sécantes. $(DP)\cap(HG)\in(EFG)$ car $H\in(EFG)$ donc $I=(DP)\cap(HG)$. $I\in(DMP)\cap(EFG)$. Le plan (DMP) coupe les plans parallèles (CDA) et (EFG) en deux droites parallèles, or $(DMP)\cap(CDA)=(DA)$ donc $d_1=(DMP)\cap(EFG)$ est la parallèle à (DA) passant par I.
2. $d_1\subset(DMP)$ et (MP) in (DMP) donc les deux droites sont coplanaires. Elles ne sont pas parallèles donc elles sont sécantes. Notons que $(NJ)\subset(EFG)$ donc (NJ) et (FG) sont coplanaires et K est bien défini.
3. $J\in(MP)$ donc $J\in(MNP)$ donc $(NJ)\subset(MNP)$ et $J\in d_1$ donc $J\in(EFG)$ de même que N donc $(NJ)=(NK)=(MNP)\cap(EFG)$. et comme $N\in(EF)$ et $K\in(FG)$, $[NK]$ est bien l'intersection du plan (MNP) et de la face $EFGH$. De même pour $[KP]$.



Exercice 5

1. Chaque bit a deux valeurs possibles donc il y a $2^8=256$ octets différents.
2. - Il n'y a qu'un octet avec seulement des 1 (c'est 11111111) donc $p(A)=\frac{1}{256}$.

   - Il y a $2^5=32$ octets qui commencent par trois 0 (un choix pour les trois premiers bits puis deux pour chacun des suivants) donc $p(B)=\frac{32}{256}=\frac{1}{8}$.

   - Il s'agit de choisir deux places parmi les huit possibles pour les deux 1. On a 8 choix pour la première puis 7 pour la seconde mais comme il l'ordre n'a pas de signification ici, on obtient $\frac{8\times7}{2}=28$ possibilités donc $p(C)=\frac{28}{256}=\frac{7}{64}$.
3. a. $p(X=0)=p(X=8)=p(A)=\frac{1}{256}$ et $p(X=2)=p(X=6)=p(C)=\frac{28}{256}$. Par des raisonnements similaires a celui de l'évènement C, on obtient : $p(X=1)=p(X=7)=\frac{8}{256}$,
   $p(X=3)=p(X=5)=\frac{56}{256}\left(56=\frac{8\times7\times6}{3\times2}\right)$ et $p(X=4)=\frac{70}{256}\left(70=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2}\right)$ donc on a :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

b. $E(X)=4$ et $V(X)=2$ donc $\sigma(X)=\sqrt{2}\approx1,41$