1èreS

corrigé du devoir surveillé n°9

Exercice 1

1. a. (u_n) est arithmétique donc $u_n=u_0+nr$ donc $u_0+5r=3$ et $u_0+15r=-27$. On a donc $10r=-27-3$ donc $r=-3$ puis $u_0=3-5\times(-3)=18$ et $u_{20}=18+20\times(-3)=-42$.

   b. (u_n) est arithmétique donc $u_n=u_0+nr$ donc $u_0+10r=-52$ et $u_0+41r=-145$. On a donc $31r=-145-(-52)$ donc $r=-3$ puis $u_0=-52-10\times(-3)=-22$ et $u_{20}=-22+20\times(-3)=-82$.

2. a. (u_n) est géométrique donc $u_n=u_0\times q^n$ donc $u_0\times q^3=-15$ et $u_0\times q^7=-1215$. On a donc $\frac{u_0\times q^7}{u_0\times q^3}=\frac{-1215}{-15} \Leftrightarrow q^4=81$ donc $q=3$ ou $q=-3$. $q=3$ donne $u_0=\frac{-15}{3^3}=-\frac{5}{9}$ puis $u_{20}=-\frac{5}{9}\times3^{20}=-1\,937\,102\,145$. $q=-3$ donne $u_0=\frac{-15}{(-3)^3}=\frac{5}{9}$ puis $u_{20}=1\,937\,102\,145$.

   b. (u_n) est géométrique donc $u_n=u_0\times q^n$ donc $u_0\times q^7=-1$ et $u_0\times q^{10}=8$. On a donc $\frac{u_0\times q^{10}}{u_0\times q^7}=\frac{8}{-1} \Leftrightarrow q^3=-8$ donc $q=-2$. On a alors $u_0=\frac{-1}{(-2)^7}=\frac{1}{128}$ puis $u_{20}=\frac{1}{128}\times(-2)^{20}=2^{13}=8192$.

Exercice 2

1. $d_0=1$, $d_1=\sqrt{1+d_0^2}=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$ et $d_2=\sqrt{1+d_1^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$.

2. $d_1-d_0=\sqrt{2}-1\approx0.41$ et $d_2-d_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}\approx0.32$ donc $d_2-d_1\neq d_1-d_0$ et (d_n) n'est pas arithmétique.
   $\frac{d_1}{d_0}=\sqrt{2}\approx1.41$ et $\frac{d_2}{d_1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\approx1.22$ donc $\frac{d_2}{d_1}\neq\frac{d_1}{d_0}$ et (d_n) n'est pas géométrique.

3. Pour tout n , $u_{n+1}=d_{n+1}^2=\sqrt{1+d_n^2}^2=1+d_n^2=1+u_n$. Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 1. On a donc $u_n=u_0+n\times1=1+n$. Or $u_n=d_n^2$ et $d_n\geq0$ pour tout n donc $d_n=\sqrt{u_n}=\sqrt{1+n}$.

4. Quel que soit n , $n<n+1$ donc $\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$ c'est-à-dire $\sqrt{n}<d_n$. De plus, $n\geq2 \Rightarrow n^2\geq2n\geq n+1$ donc $\sqrt{n+1}\leq n$. On a donc bien $\sqrt{n}\leq d_n\leq n$.
   Pour tout nombre A , $n>A^2 \Rightarrow \sqrt{n}>A$ donc $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Or $d_n>\sqrt{n}$ donc d_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.