1èreS

corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1

$\frac{x}{x-1}-\frac{2x-7}{x-7}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{x(x-7)}{(x-7)(x-1)}-\frac{(2x-7)(x-1)}{(x-7)(x-1)}-\frac{(x-7)(x-1)}{(x-7)(x-1)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+10x-14}{(x-7)(x-1)}\leq 0$

Le discriminant du trinôme $-2x^2+10x-14$ est $\Delta=10^2=10^2-4\times(-2)\times(-14)=-12$ donc le trinôme est négatif pour tout x et on a :

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x^2+10x-14$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{-2x^2+10x-14}{(x-7)(x-1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

et $S=]-\infty;1[\cup]7;+\infty[$

Exercice 2

Posons $X=x^2$. L'équation $2x^4-3x^2+1=0$ devient $2X^2-3x+1=0$. Pour cette dernière, on a $\Delta=(-3)^2-4\times2\times1=1$ donc $X_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ et $X_1=\frac{3+1}{4}=1$. On doit donc résoudre les équations $x^2=1$ et $x^2=\frac{1}{2}$ qui donnent pour la première, x=1 ou x = -1 et pour la deuxième, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi $S=\{-\frac{\sqrt{2}}{2};-1\ ;1\ ;\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Exercice 3

$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2y+2x}{xy}=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{xy}{y+x}=-6$ or $x+y=3$ donc on obtient $xy=-18$. Ainsi, le système $\begin{cases} x+y=3 \\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}=-\frac{1}{3}\end{cases}$ équivaut au système $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-18\end{cases}$. On sait que dans ce cas, x et y sont solution de l'équation $x^2-3x+18=0$. Pour cette équation, $\Delta=81$ puis $x_1=-3$ et $x_2=6$ donc les solutions du système sont les couples $(6\ ;-3)$ et $(-3\ ;6)$.

Exercice 4

Le discriminant du trinôme $P(x)=2x^2-bx+3$ est $\Delta=b^2-24$.

a. P admet une racine double si $\Delta=0 \Leftrightarrow b^2-24=0 \Leftrightarrow b=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ ou $b=-\sqrt{24}=-2\sqrt{6}$.

b. P admet deux racines distinctes si $\Delta>0 \Leftrightarrow b^2-240 \Leftrightarrow b>2\sqrt{6}$ ou $b<-2\sqrt{6}$. C'est-à-dire si $b\in]-\infty;-2\sqrt{6}[\cup]2\sqrt{6};+\infty[$.

c. P n'admet pas de racine dans les autres cas, c'est -à-dire si $b\in]-2\sqrt{6};2\sqrt{6}[$.

Exercice 5

$(4\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v})=-1 \Leftrightarrow 8\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}^2=-1$. Or $\|\vec{u}\|=1$ et $\|\vec{v}\|=3$ donc $\vec{u}^2=1$ et $\vec{v}^2=9$ et donc $8\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}^2=-1 \Leftrightarrow 8-2\vec{u}.\vec{v}-9=-1 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.