1èreS

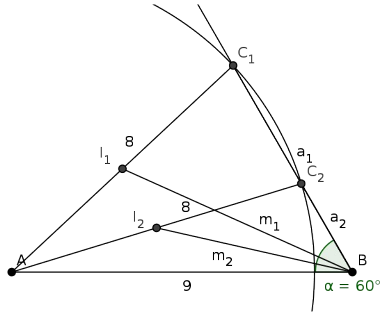
corrigé du devoir surveillé n°5

Exercice 1

$(2\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{v}-\vec{u})=\vec{u}.\vec{v}+2\vec{v}^2-2\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}=3\vec{u}.\vec{v}+2\times2-2\times5=3\vec{u}.\vec{v}+6$. Donc
$(2\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{v}-\vec{u})=6+3\sqrt{5} \Leftrightarrow 3\vec{u}.\vec{v}+6=6+3\sqrt{5} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=\sqrt{5}$.

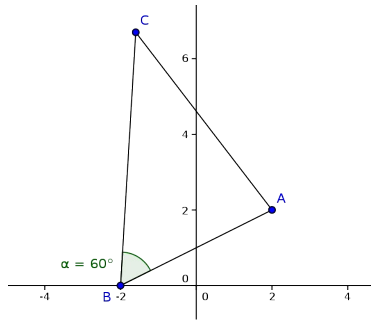
Or $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ donc $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $(\vec{u},\vec{v})=45°$.

Exercice 2



1. Il semble y avoir deux cas possibles.
2. Dans ABC on a $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$. c'est-à-dire :
   $8^2=a^2+9^2-2\times9a\cos60° \Leftrightarrow a^2-9a+17=0$. Le discriminant de cette équation est $81-68=13$. Elle a donc deux solutions,
   $a_1=\dfrac{9+\sqrt{13}}{2}\simeq6{,}3\,cm$ et $a_2=\dfrac{9-\sqrt{13}}{2}\simeq2{,}7\,cm$.
3. Dans ABC , en posant I milieu de $[AC]$ on a
   $a^2+c^2=2BI^2+\dfrac{1}{2}b^2$ donc $BI^2=\dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{4}=\dfrac{a^2+49}{2}$. Dans le premier cas on obtient $m_1^2=\dfrac{145+9\sqrt{13}}{4}$ donc $m_1\simeq6{,}7\,cm$ et dans le second $m_2^2=\dfrac{145-9\sqrt{13}}{4}$ donc $m_2\simeq5{,}3\,cm$.

Exercice 3



On a $\overrightarrow{BA}(4;2)$ et donc $BA=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. et $\overrightarrow{BC}(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2}+3\sqrt{3})$

donc $BC^2=(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2})^2+(\dfrac{3}{2}+3\sqrt{3})^2=9-9\sqrt{3}+\dfrac{27}{4}+\dfrac{9}{4}+9\sqrt{3}+27=45$; Donc
$BC=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=4(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2})+2(\dfrac{3}{2}+3\sqrt{3})=15$

On a par ailleurs $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos\widehat{BAC}$ donc
$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\dfrac{15}{2\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$.
donc $\cos\widehat{BAC}=60°$.

Exercice 4

1. On a $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ce qui amène à $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
2. $3MA^2+MB^2=3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2=3MG^2+6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+3GA^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+GB^2$
   $=4MG^2+2\overrightarrow{MG}.(3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})+3GA^2+GB^2$
   or, $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $GA^2=\dfrac{AB^2}{16}$ et $\overrightarrow{GB}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $GB^2=\dfrac{9}{16}AB^2$. Donc
   $3MA^2+MB^2=4MG^2+\dfrac{3}{16}AB^2+\dfrac{9}{16}AB^2=4MG^2+\dfrac{3}{4}AB^2$.
3. a. Pour $M=A$, $3MA^2+MB^2=3AA^2+AB^2=AB^2$ donc l'égalité $3MA^2+MB^2=AB^2$ est vérifiée et $M\in(E)$.
   b. $3MA^2+MB^2=AB^2 \Leftrightarrow 4MG^2+\dfrac{3}{4}AB^2=AB^2 \Leftrightarrow MG^2=\dfrac{1}{16}AB^2 \Leftrightarrow MG=\dfrac{1}{4}AB$. La distance MG est constante donc (E) est un cercle de centre G . Comme $A\in(E)$, on peut dire que (E) est le cercle de centre G passant par A .