1èreS Mardi 1er février 2010

Devoir surveillé n°7
(3 heures)

Exercice 1 (5 points)

1. f est la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Montrez, en utilisant une limite, que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.
2. En déduire (sans calculatrice) une valeur approchée de $\frac{1}{(0{,}996)^2}$ avec une précision au moins égale à 10^{-4}. Vérifier ensuite, à l'aide de la calculatrice un ordre de grandeur de l'erreur commise.

Exercice 2 (6 points)
Calculer les fonctions dérivées des fonctions f, g, h et k définies par :
$f(x)=x^4-2x^3+5x-1$, $g(x)=(2x^2-1)^3$, $h(x)=\frac{2}{(x^3-1)}$ et $k(x)=\frac{x^2+6}{5x-2}$

Exercice 3 (8 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+1$. Pour tout nombre m réel, on considère la droite d'équation $y=-2x+m$ (notée D_m).

1. Étudier le signe du trinôme $f(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa représentation graphique (notée P).
3. Tracer D_0 puis D_{-3} et D_2 .Déterminer graphiquement le nombre de point d'intersection de D_m et de P suivant les valeurs de m.
4. Déterminer, maintenant par le calcul, le nombre de points d'intersection de D_m et de P.
5. Donner les coordonnées du point d'intersection dans le cas où il est unique.
6. Lorsque D_m coupe P en deux points distincts A_m et B_m, on appelle I_m le milieu de $[A_m; B_m,]$ .Quel est l'ensemble des point I_m quand m parcourt $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 4 (5 points)
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle a le résultat du premier dé et b celui du second.
On définie la variable aléatoire X par $X=|a-b|$ (valeur absolue de $(a-b)$).

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X (On ne demande pas le détail des calculs).

Exercice 5 (8 points)

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soit A, B, C et D les points de coordonnées respectives $(3\,;3)$, $(-1\,;-1)$, $(-2\,;-3)$ et $(3\,;-3)$.

1. Déterminer les coordonnées du point E tel que $BCDE$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du barycentre G de $(A,2)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$, et $(E,1)$.
3. Soit L le centre du parallélogramme $BCDE$. Démontrer que les points A , G et L sont alignés.
4. a. Démontrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
   b. Que représente le point G pour le triangle ABD ?
5. Soit I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[DE]$. Montrer que G est l'isobarycentre du triangle AIJ.

Exercice 6 (8 points)

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=4$ et $AC=3$. Soit I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[IC]$. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2+2MC^2=66$. On se propose de déterminer (E).

1ère méthode :

1. Montrer que $B\in(E)$.
2. En utilisant deux fois le théorème de la médiane, démontrer que
   $M\in(E) \Leftrightarrow 4MJ^2+\frac{1}{2}AB^2+IC^2=66$.
3. En déduire la nature de E

2ème méthode :

On utilise un repère orthonormé $(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB};\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})$.

1. Déterminer une équation de (E) dans ce repère.
2. Retrouver les résultats obtenus avec la première méthode.