1èreS

corrigé du devoir surveillé n°7

Exercice 1

1. $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+h)^2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1-(1+h)^2}{h(1+h)^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-2h-h^2}{h(1+h)^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-2-h}{(1+h)^2}=\dfrac{-2-0}{(1+0)^2}=-2$.
   Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=-2$.
2. Pour h petit, on a $f(1+h)\simeq f(1)+hf'(1)$ donc $f(0996)=f(1-0{,}004)\simeq 1-0{,}004\times(-2)\simeq 1{,}008$.
   Avec la calculatrice on $f(0{,}996)\approx 1{,}00805$ donc l'erreur commise est de l'ordre de 5×10^{-5} .

Exercice 2

$f'(x)=4x^3-6x^2+5$, $g'(x)=3\times 4x\times(2x^2-1)^2=12x(2x^2-1)^2$,

$h'(x)=\dfrac{-2\times 3x^2}{(x^3-1)^2}=\dfrac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$, $k'(x)=\dfrac{2x(5x-2)-5(x^2+6)}{(5x-2)^2}=\dfrac{5x^2-4x-30}{(5x-2)^2}$.

Exercice 3

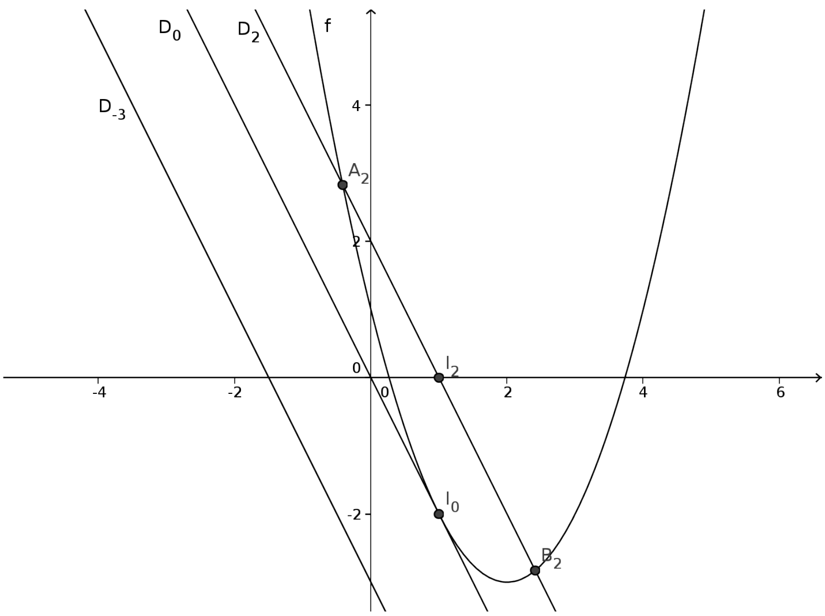
1. Pour le trinôme x^2-4x+1 , $\Delta=12$ puis $x_1=2-\sqrt{3}$ et $x_2=2+\sqrt{3}$. Donc on a

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-4x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $f(x)=(x-2)^2-3$ donc on a :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

3. Il semble que quand $m>0$, il y ait deux point d'intersection entre D_m et P , quand $m=0$, il y en ait un et quand $m<0$, il n'y en ait pas.
4. D_m coupe P équivaut à $x^2-4x+1=-2x+m \Leftrightarrow x^2-2x+1-m=0$. Pour ce trinôme, $\Delta=4m$ donc effectivement il y a deux solutions si $m>0$, une solution si $m=0$ et pas de solution si $m<0$.
5. Pour $m=0$, il faut résoudre $x^2-2x+1=0$ ce qui donne $x=1$ donc le point d'intersection a pour coordonnées $(1\ ;-2)$.
6. Si $m>0$, l'équation précédente a deux solutions, $x_1=1-\sqrt{m}$ et $x_2=1+\sqrt{m}$ donc on a $A_m(1-\sqrt{m};m+2\sqrt{m}-2)$ et $B_m(1+\sqrt{m};m-2\sqrt{m}-2)$ puis $I_m(1;m-2)$. Donc quand m parcourt $\mathbb{R}$ tout entier, I_m existe si m>=0 et alors il parcourt la demie-droite d'équation $x=1$ avec $y\geq -2$



Exercice 4

1. A l'aide d'un tableau on obtient la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

2. On a $E(X)=\frac{35}{18}\approx 1{,}94$ et $V(X)=\frac{665}{324}\approx 2.05$.

Exercice 5

1. On a $\overrightarrow{BC}(-1;-2)$ donc on doit avoir $\overrightarrow{ED}(-1;-2)$ ce qui donne $E(4;-1)$.
2. On a $x_G=\frac{2\times 3+1\times(-1)+1\times(-2)+1\times 3+1\times 4}{6}=\frac{5}{3}$ et
$y_G=\frac{2\times 3+1\times(-1)+1\times(-3)+1\times(-3)+1\times(-1)}{6}=-\frac{1}{3}$.
3. Le centre de $BCDE$ est l'isobarycentre de B , C , D et E donc G est aussi le barycentre de $(A,2)$ et $(L,4)$ et donc, A , G et L sont alignés.
4. a. Notons M le milieu commun de $[BD]$ et de $[CE]$. C'est donc l'isobarycentre de B et de D ainsi que de C et de E . donc on peut dire que G est le barycentre de $(A,2)$, $(B,2)$ et $(D,2)$ et donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
b. On peut donc dire que G est le centre de gravité de ABD .
5. I est l'isobarycentre de B et de C et J celui de D et de E donc G est le barycentre de $(A,2)$, $(I,2)$ et $(J,2)$ c'est-à-dire l'isobarycentre de AIJ .

Exercice 6

1ère méthode :

1. ABC est un triangle rectangle en A donc $BC^2=AB^2+AC^2=4^2+3^2=25$ et $BA^2+BB^2+2\mathrm{BC}^2=16+2\times 25=66$ donc $B\in(E)$.
2. Dans le triangle MAB , d'après le théorème de la médiane $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$. Donc
$MA^2+MB^2+2MC^2=2(MI^2+MC^2)+\frac{1}{2}AB^2$. Dans le triangle MIC on a
$MI^2+MC^2=2MJ^2+\frac{1}{2}IC^2$ et donc
$MA^2+MB^2+2MC^2=2(MI^2+MC^2)+\frac{1}{2}AB^2=2(2MJ^2+\frac{1}{2}IC^2)+\frac{1}{2}AB^2=4MJ^2+IC^2+\frac{1}{2}AB^2$ ce qui prouve le résultat cherché.
3. $4MJ^2+\frac{1}{2}AB^2+IC^2=66$ signifie que MJ est constante donc (E) est un cercle de centre J .
Comme (E) passe par B , (E) est le cercle de centre J passant par B .

2ème méthode :

1. Dans le repère $(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB};\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})$, on a $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(0;3)$, $I(2;0)$ et $J(1;\frac{3}{2})$. Donc
$MA^2+MB^2+2MC^2=66 \Leftrightarrow x^2+y^2+(x-4)^2+y^2+2(x^2+(y-3)^2)=66$
$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-8x-12y-32=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-3y-8=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{45}{4}$.
2. On constate que l'équation de (E) est celle du cercle de centre J et de rayon $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. Les coordonnées de B vérifient cette équation donc on retrouve les résultats précédents .