1èreS

corrigé du devoir surveillé n°9

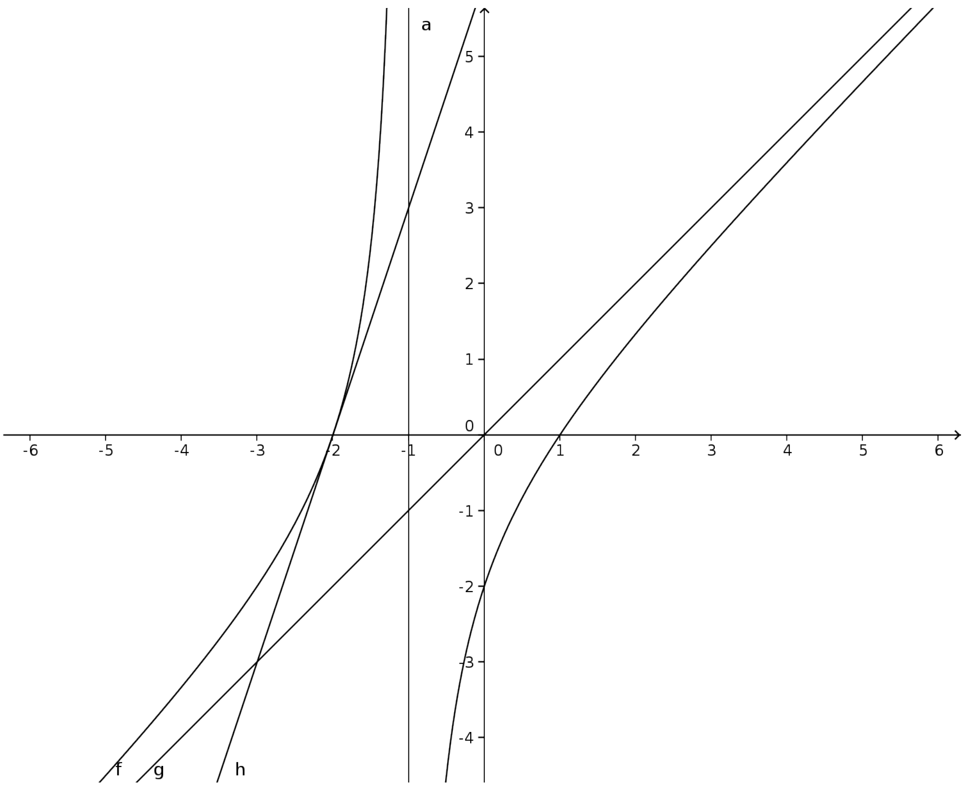
Exercice 1

1. $f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x-2)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$. f'(x) est du signe de x^2+3x+4 . Pour ce trinôme on a $\Delta=-8<0$ donc $x^2+2x+3>0$ pour tout x . On en déduit que f est croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.
2. a. $ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$. Par identification on obtient $\begin{cases} a=1 \\ a+b=3 \\ b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-2 \end{cases}$. Donc $f(x)=x-\frac{2}{x+1}$.

   b. Il s'agit d'étudier le signe $\frac{-2}{x+1}$. $\frac{-2}{x+1}>0$ pour $x\in]-\infty;-1[$ et $\frac{-2}{x+1}<0$ pour $x\in]-1;+\infty[$. Donc pour $x\in]-\infty;-1[$, C_f est au dessus de Δ et pour $x\in]-1;+\infty[$, C_f est en-dessous.
3. $\frac{f(-1+x)+f(-1-x)}{2}=\frac{\frac{(-1+x)^2+(-1+x)-2}{-1+x+1}+\frac{(-1-x)^2+(-1-x)-2}{-1-x+1}}{2}=\frac{\frac{x^2-x-2}{x}+\frac{x^2+x-2}{-x}}{2}$

   $=\frac{\frac{-2x}{x}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

   On en déduit que le milieu I du segment $[BC]$, avec $B(-1+x;f(-1+x))$ et $C(-1-x;f(-1-x))$, a pour coordonnées $(-1;-1)$. Ceci montre que I est un centre de symétrie pour la courbe C_f .
4. $f'(-2)=\frac{(-2)^2+2\times(-2)+3}{(-2+1)^2}=3$ donc l'équation de T est $y=3(x+2) \Leftrightarrow y=3x+6$
5.



Exercice 2

1. $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF})=(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CF})=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}(2\pi)$. Le triangle CDF étant isocèle, $(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FD})$ or $(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FD})+(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF})=\pi(2\pi)$ on a donc $(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}(\pi-\frac{5\pi}{6})=\frac{\pi}{12}(2\pi)$ (Ici, l'autre mesure possible n'est pas pertinente). De même, $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}(2\pi)$ puis $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE})=\frac{1}{2}(\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{5\pi}{12}(2\pi)$.
2. $(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DE})=(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE})=\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}=0(2\pi)$ donc D, E et F sont alignés.

Exercice 3

$\sin^2 a+\cos^2 a=1$ donc $\sin^2 a=\frac{8}{9}$. $a\in[0;\frac{\pi}{2}]$ donc $\sin a>0$ donc $\sin a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. $\sin^2 b+\cos^2 b=1$ donc $\sin^2 b=\frac{4}{9}$. $b\in[\frac{\pi}{2};\pi]$ donc $\cos b<0$ donc $\cos b=-\frac{2}{3}$.

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b=\frac{1}{3}\times(-\frac{2}{3})-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{-2-2\sqrt{10}}{9}$.

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times(-\frac{2}{3})-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{-4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$

Exercice 4

1. $\sin(x+\frac{\pi}{6})=\cos x \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{6}))=\cos x \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{3}-x)=\cos x$. Ce qui donne $\frac{\pi}{3}-x=x+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ donc dans $[0\,;2\pi[$, $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{3}-x=-x+2k\pi \Leftrightarrow 0=\frac{\pi}{6}+k\pi$ ce qui n'a pas de solution. Donc $S=\{\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\}$
2. L'équation « normale » était $\cos(2x)+\frac{3}{2}=2\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+\frac{3}{2}=2\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x-2\cos x1+\frac{1}{2}=0$. En posant $X=\cos x$, on obtient l'équation $2X^2-2X+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 4X^2-4X+1=0 \Leftrightarrow (2X-1)^2=0 \Leftrightarrow 2X-1=0 \Leftrightarrow X=\frac{1}{2}$. on doit donc résoudre $\cos x=\frac{1}{2}$ qui donne sur $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{2\pi}{3}$.
L'équation proposée, par le même changement de variable amène à $4X^2-3X-2=0$ qui donne $X_1=\frac{3+\sqrt{41}}{8}\approx 1{,}2$ et $X_1=\frac{3-\sqrt{41}}{8}\approx 0{,}42$. L'équation $\cos x=X_1$ n'a pas de solution car $X_1\notin[-1;1]$ et l'équation $\cos x=X_2$ a deux solutions dans $[0\,;2\pi[$, $x_1\approx 1{,}13$ et $x_2\approx 2{,}01$ (approximativement 65° et 115°).