1èreS

corrigé de du D.S. n°4

Exercice 1

$A = \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{9\pi}{4} + \cos\frac{11\pi}{4}$

$= \cos(\pi-\frac{\pi}{4}) + \cos(\pi+\frac{\pi}{4}) + \cos(2\pi-\frac{\pi}{4}) + \cos(2\pi-\frac{\pi}{4}) + \cos(3\pi-\frac{\pi}{4})$

$= -\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B = \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} = \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin(2\pi-\frac{4\pi}{5}) + \sin(2\pi-\frac{2\pi}{5})$

$= \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5} = 0$

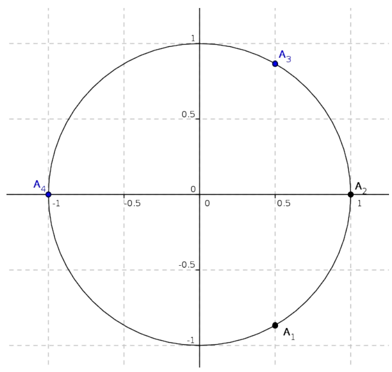
Exercice 2

$\cos^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10} = 1$ donc $\sin^2\frac{\pi}{10} = 1-\cos^2\frac{\pi}{10} = 1-\frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16}$. Or $\frac{\pi}{10}\in[0\,;2\pi]$ donc $\sin\frac{\pi}{10}>0$ et donc $\sin\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}$. $\sin(-\frac{9\pi}{10}) = \sin(-\pi+\frac{\pi}{10}) = -\sin\frac{\pi}{10}$ donc $\sin(-\frac{9\pi}{10}) = -\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}$. Remarque : $(\sqrt{5}-1)^2=6-2\sqrt{5}$ donc $\sin(-\frac{9\pi}{10}) = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 3

1. $\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$
2. $\tan\frac{5\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}) = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{12}} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$.

Exercice 4



1. $\sin x = \sin(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x+2k\pi \\ x=\pi-2x+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=2k\pi \\ 3x=\pi+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2k\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3} \end{cases}$.

   Dans $]-\pi\,;\pi]$, pour $k=0$ dans la première égalité, on obtient $x=0$, puis pour $k=-1$, 0 et 1 on obtient $x=\frac{-\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$ et $x=\pi$. Donc $S=\left\{-\frac{\pi}{3};0;\frac{\pi}{3};\pi\right\}$.
2. L'angle de mesure $\frac{\pi}{3}=60°$ répond au problème.

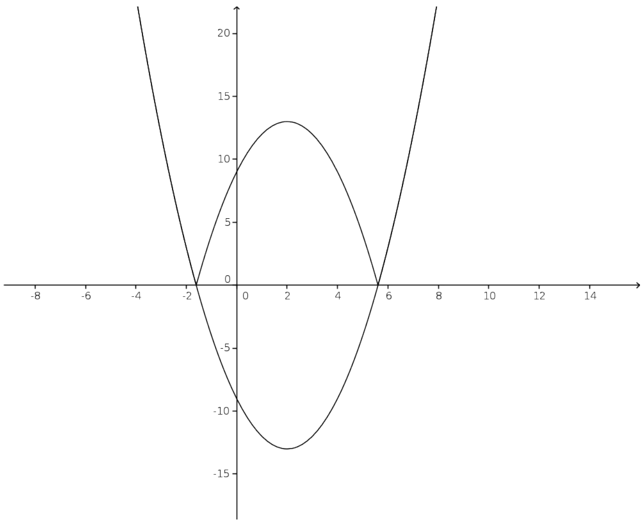
Exercice 5

1. a. Les événement élémentaires qui composent A sont d'obtenir l'un des nombres suivants : 3; 13 ; 23 ; 30 ; 31 ; 32;33 ; 34 ; 35 ; 36 ; 37 ; 38 ; 39 ; 43 ; 53 ; 63 ; 73 ; 83 ; 93.
   b. On choisi un nombre au hasard, donc les événements élémentaires sont équiprobables. A comprend 19 événements élémentaires sur 100 donc $p(A) = \frac{19}{100}$ puis $p(\bar{A}) = 1-p(A) = 1-\frac{19}{100} = \frac{81}{100}$.
2. $A\cap B=$ « obtenir 83 ou 93 » donc $p(A\cap B)=\frac{2}{100}$.
3. B comprend 21 événements élémentaires (de 80 à 100) donc $p(B)=\frac{21}{100}$.

   $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{19}{100}+\frac{21}{100}-\frac{2}{100}=\frac{38}{100}$.

Exercice 6

1. Le discriminant du trinôme x^2-4x-9 est $\Delta=16+36=52$ et ses racines, $x_1=2-\sqrt{13}$ et $x_2=2+\sqrt{13}$ donc $x^2-4x-9\geq 0$ si $x\in]-\infty;2-\sqrt{13}]\cup[2+\sqrt{13};+\infty[$ et $x^2-4x-9\leq 0$ si $x\in[2-\sqrt{13};2+\sqrt{13}]$
2. a. $g(x)=x^2-4x-9=(x-2)^2-13$ donc g est décroissante sur $]-\infty;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$.
   b. La fonction g et décroissante puis croissante donc elle possède un minimum atteint pour $x=2$.
3. a. $f(x)=|g(x)|$ donc $f(x)=g(x)$ si $g(x)\geq 0$ et $f(x)=-g(x)$ si $g(x)\leq 0$ On a donc :
   $$f(x)=\begin{cases} x^2-4x-9 & si\, x\in]-\infty;2-\sqrt{13}]\cup[2+\sqrt{13};+\infty[\\ -x^2+4x+9 & si\, x\in[2-\sqrt{13};2+\sqrt{13}] \end{cases}.$$
   b. On obtient la courbe représentative de f en prenant celle de g pour la partie située au dessus de l'axe des abscisses et la symétrique de celle de g par rapport à l'axe des abscisses pour la partie située en-dessous.



Comme $f(x)=g(x)$ si $x\in]-\infty;2-\sqrt{13}]\cup[2+\sqrt{13};+\infty[$, on peut dire que f est décroissante sur $]-\infty;2-\sqrt{13}]$ et croissante sur $[2+\sqrt{13};+\infty[$. de plus, $f(x)=-g(x)$ sur $[2-\sqrt{13};2+\sqrt{13}]$ donc f est croissante sur $[2-\sqrt{13};2]$ et décroissante sur $[2;2+\sqrt{13}]$.
d. L'étude des variations de f montre qu'elle possède un minimum, 0 atteint pour $x=2-\sqrt{13}$ et pour $x=2+\sqrt{13}$ et un maximum local, 9 , atteint pour $x=2$.

Exercice 7

1. a. $u(x)=-x^2+9$ donc on peut dire que u est croissante sur $[-3;0]$ et décroissante sur $[0;3]$.
   b. Comme $f(x)=\sqrt{u(x)}$ et que $u(x)\geq 0\, sur[-3;3]$, on peut dire que f est définie et a les mêmes variations que u sur cet intervalle. on a donc :

x	-3	0	3
f(x)	0 ↗	3	↘ 0

2.