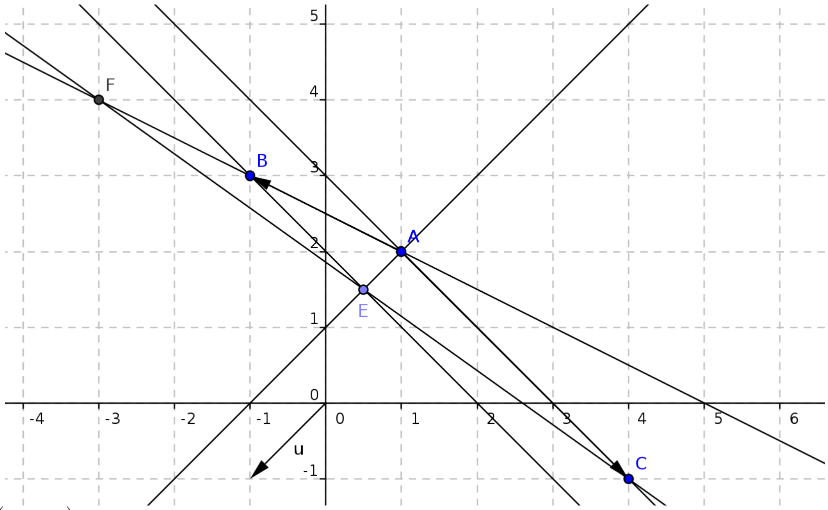
1èreS

corrigé de du D.S. n°5



Exercice 1

1. Voir ci-contre

2. On a $\overrightarrow{AB}(-1-1;3-2)$ et $\overrightarrow{AC}(4-1;-1-2)$ donc $\overrightarrow{AB}(-2;1)$ et $\overrightarrow{AC}(3;-3)$.

3. On a $\vec{u}(2\times(-2)+3\ ;2\times1+(-3))$ donc $\vec{u}(-1\ ;-1)$.
Soit $M(x;y)$ donc $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2)$.
$M\in(d) \Leftrightarrow -1(x-1)-(-1)(y-2)=0 \Leftrightarrow -x+y-1=0$ qui est donc une équation cartésienne de (d) .

4. Il s'agit de résoudre l'équation $-\frac{1}{2}+y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$. Donc on a $E(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$.

5. **a.** On a $\overrightarrow{BE}(\frac{1}{2}-(-1);\frac{3}{2}-3)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{BE}(\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$.
b. $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les droites (BE) et (AC) sont parallèles.

6. **a.** $M\in(AB) \Leftrightarrow 1(x-1)-(-2)(y-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$.
b. On a $\overrightarrow{CE}(-\frac{7}{2};\frac{5}{2})$ donc
$M\in(CE) \Leftrightarrow \frac{5}{2}(x-4)-(-\frac{7}{2})(y+1)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x+\frac{7}{2}y-\frac{13}{2}=0 \Leftrightarrow 5x+7y-13=0$.
c. Il faut résoudre le système $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 5x+7y-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x-10y+25=0 \\ 5x+7y-13=0 \end{cases}$ par addition on obtient $-3y+12=0 \Leftrightarrow y=4$ puis $x+2\times4-5=0$ donc $x=-3$ et on a $F(-3;4)$.

7. **a.** $\frac{x_A+x_F}{2}=x_B$ et $\frac{y_A+y_F}{2}=y_B$ donc B est le milieu de $[AF]$.
b. Dans le triangle ACF , B est le milieu de $[AF]$, E appartient à $[FC]$ et (BE) est parallèle à (AC) donc E est le milieu de $[FC]$.

Exercice 2

1. $A\in(d_m) \Leftrightarrow -m^2-(m-1)-1=0 \Leftrightarrow -m^2-m=0 \Leftrightarrow m(m+1)=0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m=-1$.
(d_0) a pour équation $y-1=0$ et $(d-1)$ a pour équation $x+2y-1=0$.

2. Le vecteur $\vec{v}_m(m-1;m^2)$ est un vecteur directeur de (d_m) , donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d_m) si $\vec{u}$ et $\vec{v}_m$ sont colinéaires. Il faut donc résoudre l'équation
$1m^2-4(m-1)=0 \Leftrightarrow m^2-4m+1=0 \Leftrightarrow (m-2)^2=0 \Leftrightarrow m=2$.

3. La droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{w}(3;5)$. On doit donc résoudre l'équation
$3m^2-5(m-1)=0 \Leftrightarrow 3m^2-5m-5=0$. Dans cette équation, $\Delta=(-5)^2-4\times3\times5=-45<0$, donc cette équation n'a pas de solution.

Exercice 3

1. Selon que Sarah gagne 5000 €, 1000 €, 50 € ou rien, sachant qu'elle a dépensé 5 €, les valeurs possibles de ***X*** sont donc 4995, 995, 45 et -5.

2. La probabilité d'une issue est égale au nombre de billets correspondant à cette issue divisé par le nombre totale de billet (Il y a équiprobabilité pour chaque billet) donc on a :

x_i	-5	45	995	4995
$p(x_i)$	$\frac{2944}{3000}$	$\frac{50}{3000}$	$\frac{5}{3000}$	$\frac{1}{3000}$

3. $E(X)=-\frac{2500}{3000}=-\frac{5}{6}$.

4. Le bénéfice de l'organisateur est $3000\times5-50\times50-5\times1000-5000=2500€$.

Exercice 4

1. L'aire de la zone à 100 points est $\pi\times5^2=25\pi\ cm^2$.
   L'aire de la zone à 50 points est $\pi\times10^2-\pi\times5^2=75\pi\ cm^2$.
   L'aire de la zone à 20 points est $\pi\times15^2-\pi\times10^2=125\pi\ cm^2$.

2. **a.** La surface totale de la cible est $15^2\times\pi=225\pi$ donc la zone à 100 points représente $\frac{25\pi}{225\pi}=\frac{1}{9}$ de l'aire totale. De même, la zone à 50 points représente $\frac{3}{9}$ de l'aire totale et la zone à 50 points représente $\frac{5}{9}$ de l'aire totale. On a donc :

x_i	20	50	100
$p(x_i)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

   b. $E(\boldsymbol{X})=\frac{350}{9}\simeq 38{,}9$ et $\sigma(\boldsymbol{X})\simeq 25{,}58$.

3. **a.** On peut représenter la situation dans le tableau suivant :

2nd lancer / 1er lancer	20	50	100
20	40	70	120
50	70	100	150
100	120	150	200

   L'ensemble des valeurs possibles pour ***Y*** est donc $40\,;70\,;100\,;120\,;150\,;200$.

   b. Pour chaque case du tableau précédent, la probabilité est le produit des probabilités des deux lancers correspondants. La loi de probabilité de ***Y*** est donc :

y_i	40	70	100	120	150	200
$p(y_i)$	$\frac{25}{81}$	$\frac{30}{81}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{1}{81}$

   c. $E(\boldsymbol{Y})=\frac{6300}{81}=\frac{700}{9}\simeq 77{,}8$. On remarque que $E(\boldsymbol{Y})=2E(\boldsymbol{X})$.

Exercice 5

1. $f(1+h)=(1+h)^3-2(1+h)=h^3+3h^2+3h+1-2h-2=h^3+3h^2+h-1$.
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3+3h^2+h-1-(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h^2+3h+1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h^2+3h+1)=1$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=1$.

2. L'équation de la tangente à ***C*** au point d'abscisse 1 est $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ c'est-à-dire
$y=(x-1)-1 \Leftrightarrow y=x-2$.

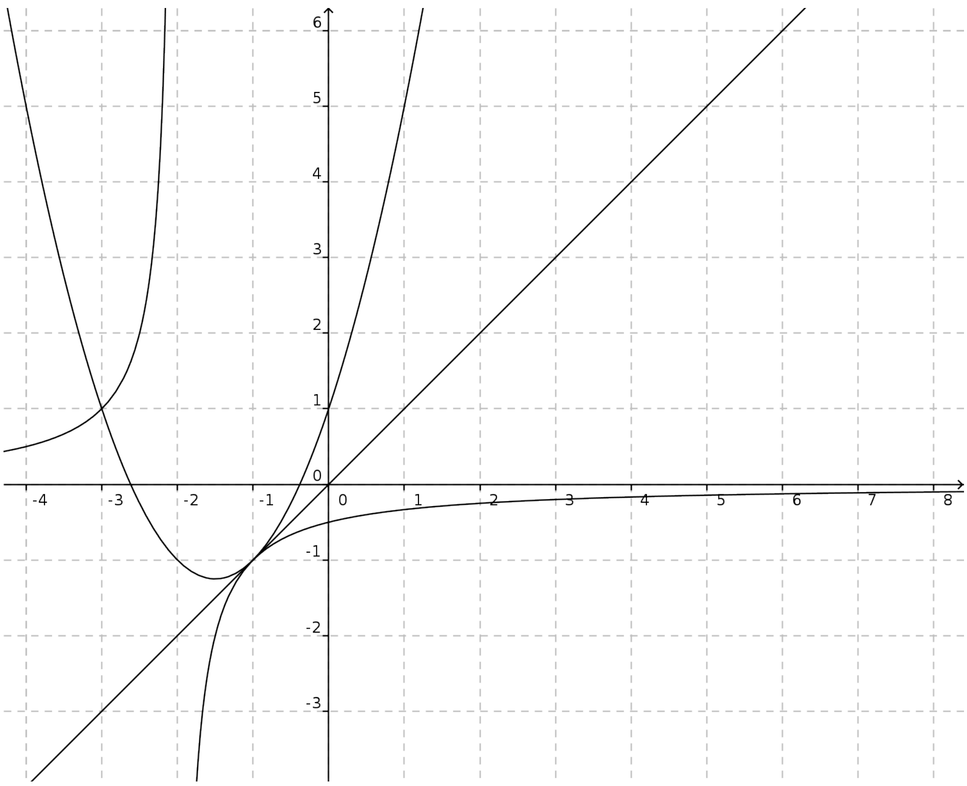
3. $(x-1)(x^2+x-2)=x^3-x^2+x^2-x-2x+2=x^3-3x+2$. Le discriminant du trinôme x^2+x-2 est $\Delta=9$ puis $x_1=-2$ et $x_2=1$. On a donc :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^3-3x+2		$-$	0	$+$	0	$+$	

4. Étudier la position relative de ***C*** et de ***T*** revient à étudier le signe de $f(x)-(x-2)$ c'est-à-dire de $x^3-2x-(x-2)=x^3-3x+2$. On en conclut que si $x<-2$, ***C*** est en dessous de ***T*** et que si $x>-2$ ***C*** est au-dessus de ***T***.

Exercice 6

1.



2. $(x+1)^2(x+3)=(x^2+2x+1)(x+3)=x^3+3x^2+2x^2+6x+x+3=x^3+5x^2+7x+3$.

3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g_1(-1+h)-g_1(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{-1}{-1+h+2}-(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{-1}{h+1}+\dfrac{h+1}{h+1}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h(h+1)}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h+1}=1$
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g_2(-1+h)-g_2(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^2+3(-1+h)+1-(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h+1)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}h+1=1$
donc $g_1'(-1)=g_2'(-1)=1$.

4. On a $g_1'(-1)=g_2'(-1)=1$ et de plus, $g_1(-1)=g_2(-1)=-1$. donc, au point d'abscisse -1 les courbes ***H*** et ***P*** admettent la même tangente d'équation $y=1(x+1)-1 \Leftrightarrow y=x$.

Exercice 7

1. AB , BC et CA sont positifs ce qui amène à chercher des solutions au problème dans $]\frac{3}{4};+\infty[$.
ABC rectangle en B équivaut à $(2x-1)^2+(3x-2)^2=(4x-3)^2 \Leftrightarrow -3x^2+8x-4=0$. Dans cette équation, $\Delta=16$ puis $x_1=\dfrac{2}{3}$ et $x_2=2$. $2>\dfrac{3}{4}$ donc 2 est une solution acceptable.
ABC rectangle en A équivaut à $(2x-1)^2+(4x-3)^2=(3x-2)^2 \Leftrightarrow 11x^2-16x+6=0$. Dans cette équation, $\Delta=-8$. Il n'y a donc pas de solution.
ABC rectangle en C équivaut à $(4x-3)^2+(3x-2)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 21x^2-32x+12=0$. Dans cette équation, $\Delta=16$ puis $x_1=\dfrac{2}{3}$ et $x_2=\dfrac{6}{7}$. $\dfrac{6}{7}>\dfrac{3}{4}$ donc c'est une solution acceptable.
Le problème a donc deux solutions, $x=\dfrac{6}{7}$ et $x=2$.

2. Cherchons si $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CL}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AD}$. ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$ et donc $\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{CK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CL}$ sont colinéaires donc les points K , C et L sont alignés.