1èreS

corrigé de du D.S. n°6

Exercice 1

- $u_2 = 2u_1 + u_0 = 2\times 4 + 8 = 16$.
- $u_3 = 2u_2 + u_1 = 2\times 16 + 4 = 36$.
- $u_4 = 2u_3 + u_2 = 2\times 36 + 16 = 88$.
- $u_4 = 2u_3 + u_2 = 2\times 88 + 36 = 212$.

Exercice 2

1. $u_2 = \frac{7u_1}{1} = 7u_1 = 7$. $u_3 = \frac{7u_2}{2} = \frac{49}{2}$. $u_4 = \frac{7u_3}{3} = \frac{343}{6}$. $u_5 = \frac{7u_4}{4} = \frac{2401}{24}$.

2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{7u_n}{n}}{u_n} = \frac{7}{n}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ si $n = 7$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ si $n < 7$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ si $n > 7$,

3. Si la suite (u_n) est à termes positifs, on peut dire qu'elle est décroissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, c'est-à-dire si $n > 7$. (remarque : (u_n) est strictement décroissante à partir de $n = 8$).

Exercice 3

1.

A	1	2	3	4	5
B	−5	−6,5	−8,75	−12,125	−17,1875

2. Calculer u_{n+1} revient à effectuer la boucle une fois de plus que pour calculer u_n , donc

$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 1$.

3. $u_n < -2 \Rightarrow \frac{3}{2}u_n < -3 \Rightarrow \frac{3}{2}u_n + 1 < -2 \Leftrightarrow u_{n+1} < -2$. Comme $u_1 < -2$, on peut en déduire que tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à -2 .

4. $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2}u_n + 1 - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1$. Or $u_n < -2$ donc $\frac{1}{2}u_n < -1$ puis $\frac{1}{2}u_n + 1 < 0$ et donc, pour tout n , $u_{n+1} - u_n < 0$. On peut en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 4

1. $ABCD$ est un rectangle, donc ABC est rectangle en B et d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 3^2 = 34$. Donc $AC = \sqrt{34}$.
De même, $DE^2 = AD^2 + AE^2 = \frac{61}{4}$. Donc $DE = \frac{\sqrt{61}}{2}$.

2. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ et $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE} = -\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ donc on a :

$\vec{AC}\cdot\vec{DE} = (\vec{AB} + \vec{AD})\cdot(-\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}) = \frac{1}{2}\vec{AB}^2 - \vec{AD}^2 - \frac{1}{2}\vec{AB}\cdot\vec{AD} = \frac{1}{2}AB^2 - AD^2$ car les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont orthogonaux. Donc $\vec{AC}\cdot\vec{DE} = \frac{1}{2}5^2 - 3^2 = \frac{7}{2}$.

3. $\vec{AC}\cdot\vec{DE} = \|\vec{AC}\|\times\|\vec{DE}\|\times\cos(\vec{AC}, \vec{DE})$ donc

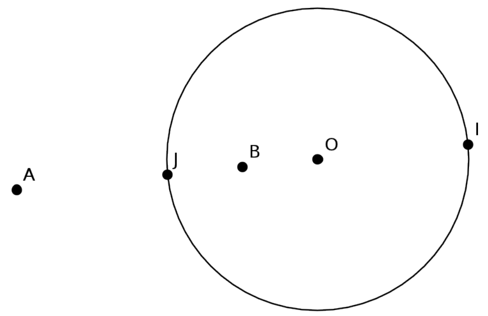
$\cos(\vec{AC}, \vec{DE}) = \frac{\vec{AC}\cdot\vec{DE}}{\|\vec{AC}\|\times\|\vec{DE}\|} = \frac{3,5}{\sqrt{34}\times\sqrt{15,25}} \approx 0,1537$. On a ensuite $(\vec{AC}, \vec{DE}) \approx 81,16°$.

Exercice 5
Partie A

1. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a $A(0;0)$ et $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ donc on a $B(3;0)$.
2. $M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow \dfrac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$ car MA et MB sont positifs. Or, on a $M(x;y)$ donc $MA^2 = x^2+y^2$ et $MB^2 = (x-3)^3+y^2 = x^2-6x+9+y^2$ et par suite,
$M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4(x^2-6x+9+y^2) \Leftrightarrow -3x^2-3y^2+24x-36 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-8x+12 = 0$.
3. $(x-4)^2+y^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-4 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-8x+12 = 0$. Notons O le point de coordonnées $(4;0)$, $(x-4)^2+y^2 = MO^2$ donc $M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow MO^2 = 4 \Leftrightarrow MO = 2$. On peut donc dire que $\boldsymbol{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 2.
4.

Partie B

1. $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}-2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ Ce qui permet de construire I. De même $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



2. $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = -\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{MI}$ car $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+2(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}) = 3\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB} = 3\overrightarrow{MJ}$ car $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$.
3. $M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$, voir question **A.2**. Donc
$M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 4\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-4\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0$
4. Ainsi, $M \in \boldsymbol{E}$ équivaut à (MI) et (MJ) perpendiculaires ce qui revient à dire que M appartient au cercle de diamètre $[IJ]$.