| D.S. n°7 | Mathématiques | 1ère S |
|---|---|---|
| Durée : 3 h | *fonctions, dérivation, suites* | *24/04/12* |

**Ce sujet est à traiter sur deux copies doubles:**

- **une pour les exercices 1, 2 et 3**
- **une deuxième pour les exercices 4 et 5**

**Exercice 1** (3 points)

Calculer les dérivées des fonctions

**a)** $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$.  **b)** $g(x) = (2x+1)(x^2 - 3x + 4)$.

**c)** $h(x) = (3x-2)\sqrt{x}$.  **d)** $k(x) = \dfrac{x^2+4}{7x-3}$.

**Exercice 2** (4 points)

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ puis établir le tableau de variations de $f$.
2. Déterminer les équations des tangentes à la courbe $(C_f)$, représentative de $f$, aux points d'abscisses respectives 0 et $\dfrac{3}{2}$.
3. Étudier la position de la courbe $(C_f)$ par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}$.
4. Représenter $(C_f)$, les droites d'équations $y = \dfrac{3}{2}$ et $x = 1$ ainsi que les tangentes précédentes dans un repère orthonormal d'unité $1\,cm$.
5. Soit $D_m$ la droite d'équation $y = 4x + m$.
   Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de $m$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4x + m$.

**Exercice 3** (3 points)

1. Les réels suivants peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite géométrique ?
   Si oui, en donner la raison. $4\sqrt{3}+3$ ; $3\sqrt{3}+12$ et $12\sqrt{3}+9$.
2. $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 17. Calculer: $u_0 + u_1 + \ldots + u_6$.
3. Exprimer en fonction de $n$ la somme $1 + \dfrac{5}{7} + \dfrac{5^2}{7^2} + \ldots + \dfrac{5^n}{7^n}$.

**Exercice 4** (6 points)

On définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par $a_0 = 1$ , $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$.

Soit D une droite munie d'un repère $(O\ ;\ \vec{i})$ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ , on considère les points $A_n$ et $B_n$ d'abscisses respectives $a_n$ et $b_n$ .

1. Placez les points $A_0$ , $B_0$ , $A_1$ , $B_1$ , $A_2$ et $B_2$ sur la droite D.
2. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ .

   Démontrez que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Exprimez $u_n$ en fonction de n. Que peut on dire du signe de $u_n$ ?
3. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_n \leq b_n$ .

   **b.** En déduire le sens de variation des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ .

   **c.** Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ .

   Démontrez que $(v_n)$ est une suite constante.

   Justifier que les segments $[A_n\ B_n]$ ont tous le même milieu I.
5. Que peut on conjecturer sur la convergence des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ ?

   Interprétez géométriquement ce résultat.

**Exercice 5** (4 points)

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ . On considère les points A (- 4 ; - 5), B(9 ; - 4) et C (3 ; 6).

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Calculer les coordonnées des milieux respectifs I et J des segments [BC] et [AC].
3. En déduire des équations cartésiennes des médianes issues de A et de B du triangle ABC.
4. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
5. Calculer $\vec{AI}\ .\ \vec{BC}$ . Que peut-on en déduire pour le triangle ABC.

**Exercice 6** ( Bonus : 2 points)

Existe-t-il des tangentes communes aux courbes ***(C)*** et ***(C')*** d'équations respectives :

$y = -1 + x^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$ .