1èreS

corrigé de du D.S. n°7

Exercice 1

a) $f'(x) = 3\times 2x - 7 = 6x - 7$.

b) Posons $u(x) = 2x + 1$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = x^2 - 3x + 4$ donc $v(x) = 2x - 3$. On a alors $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2(x^2 - 3x + 4) + (2x+1)(2x-3) = 6x^2 - 10x - 2$.

c) Posons $u(x) = 3x - 2$ donc $u'(x) = 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $v(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On a alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x-2}{2\sqrt{x}} = \frac{9x-2}{2\sqrt{x}} .$$

d) Posons $u(x) = x^2 + 4$ donc $u'(x) = 2x$ et $v(x) = 7x - 3$ donc $v(x) = 7$. On a alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2\text{x}(7x-3) - 7(x^2+4)}{(7\text{x}-3)^2} = \frac{7x^2 - 6x - 28}{(7x-3)^2} .$$

Exercice 2

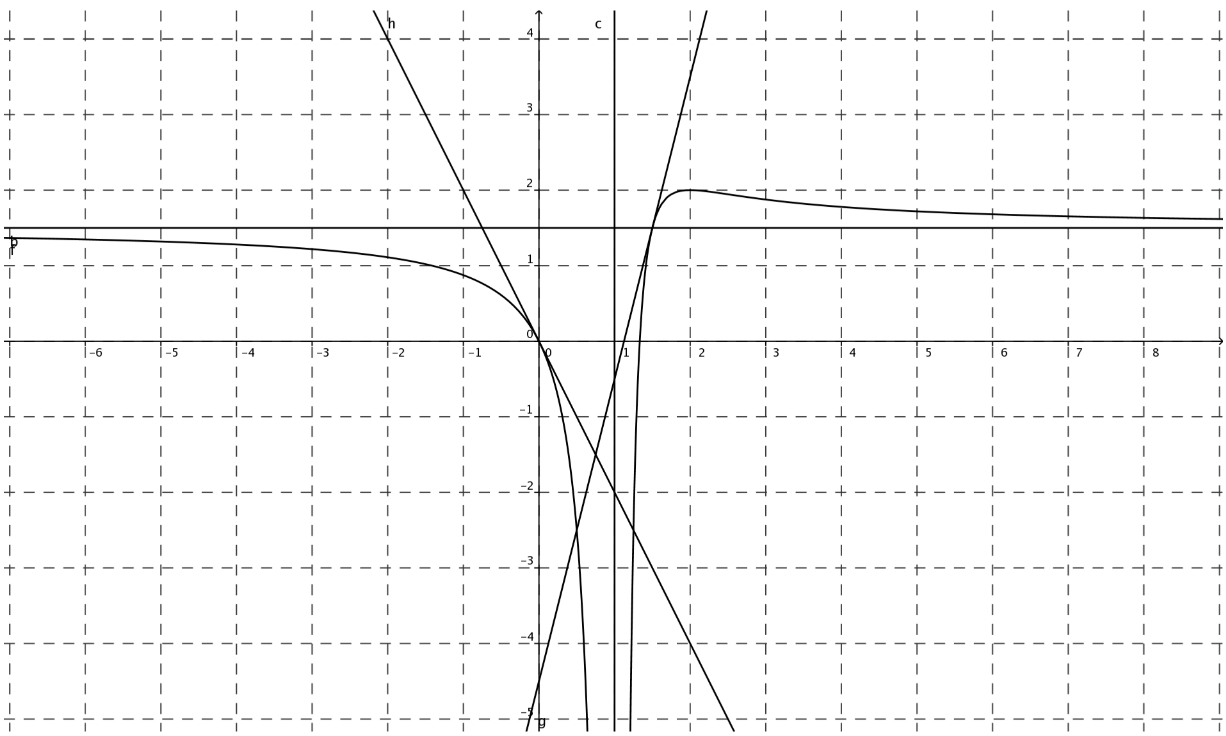
1. $f'(x) = \dfrac{2(6x-4)(x-1)^2 - 4x(3x-4)(x-1)}{4(x-1)^4} = \dfrac{(3x-2)(x-1) - x(3x-4)}{(x-1)^3} = \dfrac{-x+2}{(x-1)^3}$. On obtient

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$		$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↘ $-\infty$	$\Vert$	$-\infty$ ↗	2	↘	$\frac{3}{2}$

2. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = -2x$. Celle de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ est $y = f'(\frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) + f(\frac{3}{2}) \Leftrightarrow y = 4(x - \frac{3}{2}) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = 4x - \frac{9}{2}$

3. $f(x) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{x(3x-4)}{2(x-1)^2} - \dfrac{3(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \dfrac{2x-3}{2(x-1)^2}$ donc $f(x) - \dfrac{3}{2} > 0$ si $x > \dfrac{3}{2}$ et dans ce cas la courbe est au-dessus de la droite, elle est en dessous si $x < \dfrac{3}{2}$.

4. Voir ci-dessous.



5. La droite est tangente à la courbe. On remarque que si , coupe la courbe en trois points donc l'équation $f(x)=4x+m$ a trois solutions. Si $m=-\frac{9}{2}$ il y a deux solutions et si $m>-\frac{9}{2}$ il y a une seule solution.

Exercice 3

1. $\frac{3\sqrt{3}+12}{4\sqrt{3}+3}=\frac{(3\sqrt{3}+12)(4\sqrt{3}-3)}{(4\sqrt{3}+3)(4\sqrt{3}-3)}=\frac{39\sqrt{3}}{39}=\sqrt{3}$ et

$\frac{12\sqrt{3}+9}{3\sqrt{3}+12}=\frac{(12\sqrt{3}+9)(3\sqrt{3}-12)}{(3\sqrt{3}+12)(3\sqrt{3}-12)}=\frac{-117\sqrt{3}}{-117}=\sqrt{3}$. Les nombres considérés peuvent donc être les termes consécutifs d'un suite géométrique de raison $\sqrt{3}$.

2. $u_0+u_1+\ldots+u_6=17+4\times17+....+4^6\times17=17(1+4+...+4^n)=17\frac{1-4^7}{1-4}=17\frac{-16383}{-3}=92837$

3. $1+\frac{5}{7}+\frac{5^2}{7^2}+\ldots+\frac{5^n}{7^n}=1+\frac{5}{7}+...+(\frac{5}{7})^n=\frac{1-(\frac{5}{7})^n}{1-\frac{5}{7}}=\frac{7}{2}(1-(\frac{5}{7})^n)$

Exercice 4

1. $a_1=\frac{1}{3}(2a_0+b_0)=\frac{1}{3}(2\times1+7)=3$ et $b_1=\frac{1}{3}(a_0+2b_0)=\frac{1}{3}(1+2\times7)=5$ puis
$a_2=\frac{1}{3}(2a_1+b_1)=\frac{1}{3}(2\times3+3)=\frac{11}{3}$ et $b_2=\frac{1}{3}(a_1+2b_1)=\frac{1}{3}(3+2\times5)=\frac{13}{3}$.

2. $u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-\frac{1}{3}(2a_n+b_n)=\frac{1}{3}(b_n-a_n)=\frac{1}{3}u_n$. Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=7-1=6$. On a alors $u_n=6\times(\frac{1}{3})^n=\frac{6}{3^n}$ et donc $u_n>0$ pour tout n .

3. **a.** $u_n>0 \Leftrightarrow b_n-a_n>0 \Leftrightarrow a_n<b_n$.

b. $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)-a_n=\frac{1}{3}(b_n-a_n)$, donc $a_{n+1}-a_n>0$ et (a_n) est une suite croissante.

De même, $b_{n+1}-b_n=-\frac{1}{3}(b_n-a_n)<0$ donc (b_n) est une suite décroissante.

c. Ces résultats montrent que le point A_n se déplace vers la droite quand n augmente et que B_n se déplace vers la gauche. Par ailleurs, A_n est toujours à gauche de B_n donc les points A_n et B_n se rapprochent l'un de l'autre quand n augmente.

4. $v_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)+\frac{1}{3}(a_n+2b_n)=a_n+b_n=v_n$ donc (v_n) est est une suite constante. Comme $v_0=1+7=8$, on peut dire que pour tout n , $v_n=8$. L'abscisse du milieu de $[A_nB_n]$ est $\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{v_n}{2}=\frac{8}{2}=4$ donc tout les segments $[A_nB_n]$ ont pour milieu le point I d'abscisse 4 .

5. Les suites (a_n) et (b_n) semblent converger vers 4 . On peut donc dire que les point A_n et B_n tendent vers I quand n devient très grand.

Exercice 5

1. Voir ci-contre
2. On a $I(\frac{9+3}{2};\frac{-4+6}{2}) \Leftrightarrow I(6;1)$ et $J(\frac{-4+3}{2};\frac{-5+6}{2}) \Leftrightarrow I(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.
3. On a $\overrightarrow{AI}(10;6)$. $M(x;y)$ appartient à la médiane issue de A si et seulement si $\overrightarrow{MA}(x+4;y+5)$ et $\overrightarrow{AI}(10;6)$ sont colinéaire, c'est-à-dire $6(x+4)-10(y+5)=0 \Leftrightarrow 3x-5y-13=0$ qui est l'équation cherchée. De même pour la médiane issue de B, on obtient $\frac{9}{2}(x-9)+\frac{19}{2}(y+4)=0 \Leftrightarrow 9x+19y-5=0$.
4. G est l'intersection des médianes donc ses coordonnées vérifient le système $\begin{cases}3x-5y-13=0\\9x+19y+58=0\end{cases}$

   $\begin{cases}3x-5y-13=0\\9x+19y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-9x+15y+39=0\\9x+19y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}34y+34=0\\9x+19y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\x=\frac{8}{3}\end{cases}$. Donc on a

   $G(\frac{8}{3};-1)$.
5. On a $\overrightarrow{AI}(10;6)$ et $\overrightarrow{BC}(-6;10)$ donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-6\times10+10\times6=0$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. La médiane issue de A est donc perpendiculaire au coté $[BC]$, c'est donc aussi une hauteur et le triangle ABC est isocèle en A.

Exercice 6

Posons $f(x)=-1+x^2$ et $g(x)=\frac{1}{x}$. Si les courbes ont une tangente commune au point d'abscisse x, alors on a $f'(x)=g'(x)$ et $f(x)=g(x)$. $f'(x)=2x$ et $g\,(x)=-\frac{1}{x^2}$ donc x vérifie le système

$$\begin{cases}2x=-\frac{1}{x^2}\\-1+x^2=\frac{1}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^3=-1\\x^3-x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^3=-1\\x^3=1+x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(1+x)=-1\\x^3=1+x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{3}{2}\\x^3=1+x\end{cases}$$

. Comme $(\frac{-3}{2})^3 \neq 1-\frac{3}{2}$, on peut dire que le système n'a pas de solution et que les deux courbes n'ont pas de tangente commune au même point.