1èreS

corrigé de du D.C. n°3

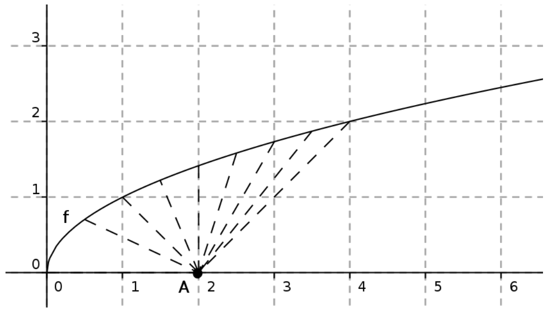
Exercice 1

Dans chaque cas, la dernière mesure est la mesure principale.

1. $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OJ'}) = (\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OJ'}) - (\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\ (2\pi) = -\frac{8\pi}{6}\ (2\pi) = -\frac{4\pi}{3}\ (2\pi) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.
2. $(\overrightarrow{OJ}\ ,\ \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OJ}) = - -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\ (2\pi) = -\frac{7\pi}{6}\ (2\pi) = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$.
3. $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OA}) = - -\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\ (2\pi) = -\frac{9\pi}{6}\ (2\pi) = -\frac{3\pi}{2}\ (2\pi) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
4. $(\overrightarrow{AO}\ ,\ \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}) + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi\ (2\pi) = (\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}) + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi\ (2\pi) = \frac{3\pi}{2}\ (2\pi) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
5. $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{BO}) = (\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}) + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi (2\pi) = (\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}) + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi\ (2\pi) = \frac{3\pi}{2}\ (2\pi) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
6. $(\overrightarrow{AO}\ ,\ \overrightarrow{BO}) = (\overrightarrow{AO}\ ,\ \overrightarrow{OB}) + \pi = (\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}) + 2\pi = (\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB})\ (2\pi) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Exercice 2

1. Voir ci-contre et ci-dessous



Abscisse de *M*	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Distance *AM*	2,0	1,7	1,4	1,3	1,4	1,7	2,0	2,4	2,8

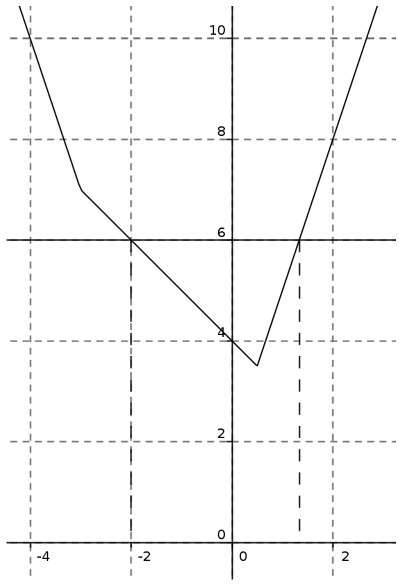
2. $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + \sqrt{x}^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4 - x}$.
3. $u(x) = x^2 - 3x + 4 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 4 = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$.
4. Le coefficient de x^2 dans le trinôme $u(x)$ est positif donc la fonction u est décroissante sur $[0\ ;\frac{3}{2}]$ puis croissante sur $[\frac{3}{2};+\infty[$. La fonction racine carrée est croissante donc les variations de la fonction $f = \sqrt{u}$ sont les mêmes que celles de u .
5. Le point de la courbe le plus proche de A correspond au minimum de la fonction f , il est donc atteint pour $x = \frac{3}{2}$ et ses coordonnées sont $(\frac{3}{2};\sqrt{\frac{3}{2}})$.

Exercice 3

1. Si $x \leq -3$, $x+3 \leq 0$ donc $|x+3| = -x-3$ et si $x \geq -3$, $x+3 \geq 0$ donc $|x+3| = x+3$.
   Si $x \leq \frac{1}{2}$, $1-2x \geq 0$ donc $|1-2x| = 1-2x$ et si $x \geq \frac{1}{2}$, $1-2x \leq 0$ donc $|1-2x| = 2x-1$.

   On a donc : $f(x) = \begin{cases} -x-3+1-2x = -3x-2 & \text{si} \quad x \in]-\infty;-3] \\ x+3+1-2x = -x+4 & \text{si} \quad x \in [-3;\frac{1}{2}] \\ x+3+2x-1 = 3x+2 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2};+\infty[\end{cases}$

2. Voir ci-contre :



La fonction f est affine sur les intervalles $]-\infty;-3]$, $[-3;\frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2};+\infty[$. On peut donc dire qu'elle est décroissante sur $]-\infty;-3]$ et sur $[-3;\frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2};+\infty[$. On a

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{7}{2}$	↗	$+\infty$

3. Sur $]-\infty;-3]$, l'équation $f(x)=6$ équivaut à $-3x-2=6$.
$-3x-2=6 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{3}$. Or $-\frac{8}{3}\notin]-\infty;-3]$ donc ce n'est pas une solution valable.
Sur $[-3;\frac{1}{2}]$, l'équation $f(x)=6$ équivaut à $-x+4=6$. $-x+4=6 \Leftrightarrow x=-2$. Or $-2\in[-3:\frac{1}{2}]$ donc c'est une solution valable.
Sur $[\frac{1}{2};+\infty[$, l'équation $f(x)=6$ équivaut à $3x+2=6$. $3x+2=6 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$. Or $\frac{4}{3}\in[\frac{1}{2};+\infty[$ donc c'est une solution valable.
L'équation $f(x)=6$ a donc 2 solutions, -2 et $\frac{4}{3}$ ce qui est cohérent avec le tableau de variations et avec le graphique.

Exercice 4

1. $|x-5|\geq 3$ signifie que la « distance » entre x et 5 est supérieure ou égale à 3. Donc x n'appartient pas à l'intervalle de centre 5 et de rayon 3 donc $x\notin]5-3;5+3[\Leftrightarrow x\notin]2;8[\Leftrightarrow x\in]-\infty;2]\cup[8;+\infty[$.
2. $x+1$ change de signe pour $x=-1$ et x change de signe pour $x=0$. Il faut donc résoudre l'équation sur les intervalles $]-\infty;-1]$, $[-1;0]$ et $[0;+\infty[$.
Sur $]-\infty;-1]$ l'équation devient $-x-1=-x+1 \Leftrightarrow -1=1$, donc pas de solution.
Sur $[-1;0]$ l'équation devient $x+1=-x+1 \Leftrightarrow x=0$, $0\in[-1;0]$ donc c'est une solution valable.
Sur $[0;+\infty[$ l'équation devient $x+1=x+1$. L'égalité est toujours vraie donc tous les nombres de $[0;+\infty[$ sont solutions.
On a donc $S=[0;+\infty[$.

Exercice 5

1. Voir ci-contre
2. On trouve une solution, $x\approx 2{,}6$
3. a. Pour tout $x\geq 0$, $\sqrt{x}\geq 0$ et pour tout $x\in[0;1[$, $x-1<0$ donc pour tout $x\in[0;1[$, $\sqrt{x}\neq x-1$ et l'équation $f(x)=g(x)$ n'a pas de solutions dans $[0;1[$ et une éventuelle solution est donc supérieure ou égale à 1.
b. $\sqrt{x}=x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2=(x-1)^2$ avec $x-1$ et $\sqrt{x}$ de même signe , c'est-à-dire ici positif. Or si $x\geq 1$ alors $x-1\geq 0$ et $\sqrt{x}\geq 0$. Donc si $x\geq 1$, $\sqrt{x}=x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow x=(x-1)^2$.
c. $x=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$. Cette équation a deux solutions, $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}38$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\approx 2{,}62$. $x_2\geq 1$ donc c'est la seule solution acceptable pour l'équation $f(x)=g(x)$.