1èreS

corrigé de du D.C. n°4

Exercice 1

1. Pour $x = \frac{\pi}{4}$, $\sin(2x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $\sin x \neq \frac{1}{2}$ donc l'affirmation est fausse.

2. $2\sin(-\frac{53\pi}{15}+\frac{\pi}{5})-1 = 2\sin(-\frac{10\pi}{3})-1 = 2\sin(-4\pi+\frac{2\pi}{3})-1 = 2\sin(\frac{2\pi}{3})-1$

   $= 2\sin(\pi-\frac{\pi}{3})-1 = 2\sin(\frac{\pi}{3})-1 = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1 = \sqrt{3}-1 \neq 0$

   donc $-\frac{53\pi}{15}$ n'est pas solution de l'équation proposée.

Exercice 2

1. $\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12} = 1$ donc $\sin^2\frac{\pi}{12} = 1-\cos^2\frac{\pi}{12} = 1-\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{16} = 1-\frac{2+\sqrt{3}}{4} = 1-\frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

   $\frac{\pi}{12}\in]0;\frac{\pi}{2}[$ donc $\sin\frac{\pi}{12} > 0$ et donc $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Remarque : On a aussi $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

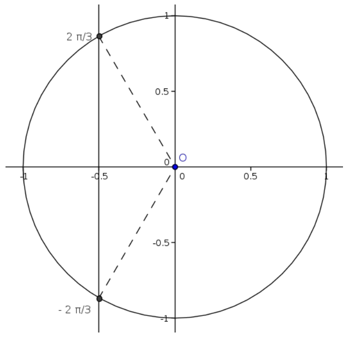
2. $\frac{11\pi}{12} = \pi-\frac{\pi}{12}$ donc $\sin(\frac{11\pi}{12}) = \sin(\pi-\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et

   $\cos(\frac{11\pi}{12}) = \cos(\pi-\frac{\pi}{12}) = -\cos(\frac{\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

3. $\frac{13\pi}{12} = \pi+\frac{\pi}{12}$ donc $\sin(\frac{13\pi}{12}) = \sin(\pi+\frac{\pi}{12}) = -\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et

   $\cos(\frac{13\pi}{12}) = \cos(\pi+\frac{\pi}{12}) = -\cos(\frac{\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 3



1. $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \cos x = \cos(\frac{2\pi}{3})$

   donc $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$.

2. Voir ci-contre

3. $\frac{2\pi}{3}+2k\pi \in [-2\pi;4\pi]$ pour $k=-1$, $k=0$ et $k=1$.

   $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \in [-2\pi;4\pi]$ pour $k=0$, $k=1$ et $k=2$. L'ensemble des solutions appartenant à $[-2\pi;4\pi]$ est donc $S=\{-\frac{4\pi}{3} ; -\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} ; \frac{8\pi}{3} ; \frac{10\pi}{3}\}$.

Exercice 4

1. $\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{3})) \Leftrightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{6}-x)$.

2. $\sin x = \sin(\frac{\pi}{6}-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}-x+2k\pi \\ x = \pi-(\frac{\pi}{6}-x)+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12}+k\pi \\ 0 = \frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}+k\pi$ pour tout entier k .

3. Dans $]-\pi;\pi]$ on obtient (pour $k=-1$ et $k=0$) $S=\{-\frac{11\pi}{12} ; \frac{\pi}{12}\}$.

Exercice 5

1. L'événement $\bar{A}$ est l'événement « ne pas obtenir de 6 ».
2. Le nombre de des cas favorables à $\bar{A}$ est 5^n (5 possibilités pour chaque dé) et le nombre de cas possibles est 6^n donc $p(\bar{A}) = \frac{5^n}{6^n}$.
3. $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{5^n}{6^n} = 1 - (\frac{5}{6})^n$.
4.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
p(A)	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{91}{216}$	$\frac{671}{1296}$	$\frac{4651}{7776}$	$\frac{31031}{46656}$	$\frac{201811}{279936}$	$\frac{1288991}{1679616}$

5. On s'apperçoit que $p(A) > \frac{3}{4}$ pour $n \geq 8$.

Exercice 6

1. Il s'agit d'une loi de probabilité donc $\frac{1}{6} + a + \frac{1}{5} + a + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow 2a = 1 - \frac{57}{60} \Leftrightarrow a = \frac{1}{40}$.
2. $E(X) = \frac{7}{6} \approx 1{,}17$ et $V(X) = \frac{151}{45} \approx 3{,}36$.

Exercice 7

1. Les valeurs prises par X sont données par le tableau suivant :

β \ α	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Les 16 éventualités du tableau précédent étant équiprobables, on obtient la loi de probabilités suivante :

x_i	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$

3. $E(X) \approx -0{,}12$ et $V(X) \approx 0{,}44$.