D.C. n°5	Mathématiques	1ère S
Durée : 3 h	***Fonctions, Probabilités, Géométrie***	*12 février 2013*

<u>Ce sujet est à traiter sur deux copies doubles:</u>

- **<u>une pour les exercices 1 ; 2 ; 3 et 4</u>**
- **<u>une deuxième pour les exercices 5 ; 6 et 7</u>**

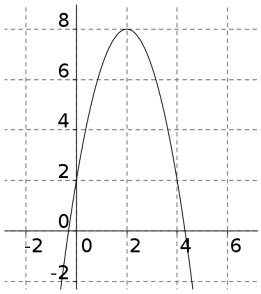
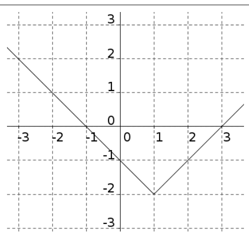
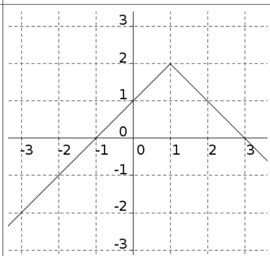
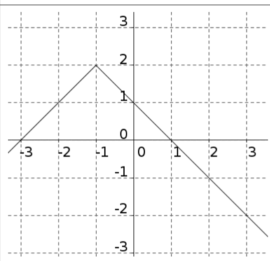
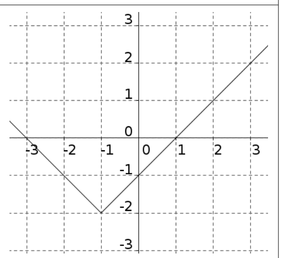
<u>Partie I</u>

<u>Exercice 1</u> (2 points) ***QCM*** (***Attention***, *+ 0,5 pt par bonne réponse et - 0.25 par mauvaise réponse)*
Aucune justification n'est demandée.

Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte.

Vous répondrez sur le sujet en entourant distinctement la réponse qui vous paraît la bonne.

Ce questionnaire est à rendre avec votre copie.

La forme canonique du trinôme T défini par $T(x)=4x^2-6x+5$ est :	$4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$	$4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$	$4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{4}$	$4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+5$
f est une fonction vérifiant $f(x)=ax^2+bx+c$ et dont la courbe représentative est 	$a>0$ et $\Delta>0$	$a<0$ et $\Delta>0$	$a>0$ et $\Delta<0$	$a<0$ et $\Delta<0$
f est la fonction décrite ci-dessus. Alors pour tout x, $f(x)=$:	$\frac{3}{2}x^2-3x+2$	$-\frac{3}{2}x^2+x-2$	$-\frac{3}{2}x^2+6x+2$	$-\frac{3}{2}x^2+2$
La courbe représentative de la fonction : $g: x \to 2-\lvert x+1\rvert$ est :				

<u>Exercice 2</u> (2 points)

Soit $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation suivante : $(m-1)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0$

1. Pour quelles valeurs de m cette équation est-elle du second degré ?
2. On suppose $m \neq 1$. Pour quelles valeurs de m l'équation d'inconnue x admet-elle :
   - **a.** une unique solution ?
   - **b.** deux solutions distinctes ?

Exercice 3 (4 points)

Une petite compagnie d'assurance fait le bilan du coût de ses assurés. Elle obtient les résultats suivants :

Coût en euros	0	500	2000	2500	4000	6000	10 000	25 000
Nombre d'assurés concernés	154	34	54	75	35	15	4	4

On choisit un assuré au hasard et on appelle C la variable aléatoire donnant le coût de cet assuré pour la compagnie.

1. Combien y a-t-il d'assurés dans cette compagnie ?
2. Donner la loi de probabilités de C .
3. Calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$.
4. À combien cette compagnie d'assurance doit-elle fixer sa cotisation pour équilibrer ses comptes ?
5. À combien doit-elle fixer sa cotisation pour réaliser un bénéfice de 50 € par assuré ?

Exercice 4 (3 points)

Un joueur lance une pièce équilibrée trois fois de suite

1. Faire un arbre représentant cette situation.
2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
A, B et C : entiers
Début
A prend la valeur : nombre aléatoire entre 1 et 2
B prend la valeur : nombre aléatoire entre 1 et 2
Si A ≠ B alors
    Afficher : « perte de 20 € »
Sinon
    C prend la valeur : nombre aléatoire entre 1 et 2
    Si A ≠ C alors
        Afficher : « perte de 20 € »
    Sinon
        Afficher : « gain de 30 € »
    FinSi
FinSi
Fin
```

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain (positif ou négatif) du joueur pour cet algorithme.

a. Expliquer les règles du jeu.

b. Donner la loi de probabilité de X .

c. Calculer l'espérance mathématique de X . Le jeu est-il équitable ?

d. Combien le joueur devrait-il gagner pour que le jeu soit équitable ?

Partie II

Exercice 5 (4 points)

On considère les points $A(1;2)$, $B(-1;3)$ et $C(4;-1)$.

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Donner une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
4. Calculer l'ordonnée du point E appartenant à la droite (d) et d'abscisse $\frac{1}{2}$.
5. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BE}$.

   b. Donner une équation cartésienne de la droite (BE).
6. **a.** Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

   b. Donner une équation cartésienne de la droite (CE).

   c. Calculer les coordonnées du point d'intersection F des droites (AB) et (CE).
7. **a.** Démontrer que le point B est le milieu du segment $[AF]$.

   b. Que peut-on en déduire pour le point E ?

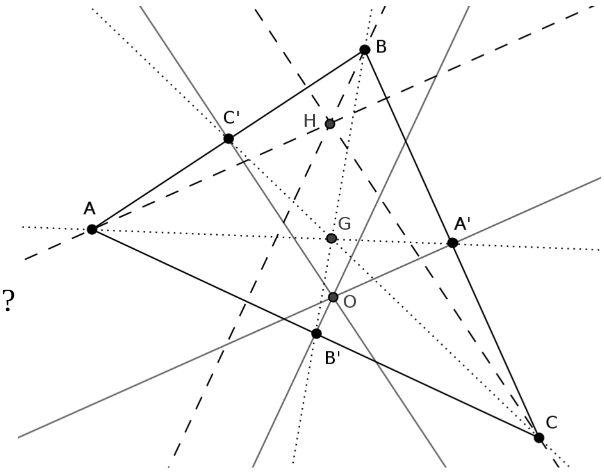
Exercice 6 (4 points)

ABC est un triangle quelconque.

On note A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

On note O le centre du cercle circonscrit à ABC, G son centre de gravité et H le point définit par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Le but de l'exercice et de montrer que, dans un triangle, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont alignés.



1. **a.** Démontrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.

   b. En déduire l'expression de $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{OA'}$.

   c. Que peut-on en conclure pour les droites (AH) et (BC) ?

   d. Démontrer de même que la droite (BH) est perpendiculaire à (AC).

   e. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
2. **a.** Sachant que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

   b. Démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

   c. Que peut-on en déduire pour les points O, G et H ?

<u>Exercice 7</u> (1 point + 1 point ***bonus***)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et ne prenant que des valeurs positives ou nulles.

De plus, on sait que :

- pour tout a et b de $\mathbb{N}$: $f(a \times b) = f(a) + f(b)$;
- si l'entier n a 3 pour chiffre des unités, alors $f(n) = 0$;
- $f(10) = 0$.

Déterminer $f(2011)$, $f(2012)$, $f(2013)$ et $f(2014)$.