1èreS

corrigé de du D.C. n°6

Exercice 1

$$\frac{f(1+h)-f(2)}{h}=\frac{\frac{1}{(1+h)^2}-1}{h}=\frac{\frac{-h(h+2)}{1+h}}{h}=-\frac{h+2}{1+h}\cdot$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}-\frac{h+2}{1+h}=-2$ et f est dérivable en 1 avec $f'(1)=-2$.

Exercice 2

1. $f'(x)=8x-3$
2. $g(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=2\mathrm{x}+3$ donc $u'(x)=2$ et $v(x)=3x-7$ donc $v'(x)=3$. Donc
   $f'(x)=2(3\mathrm{x}-7)+3(2\mathrm{x}+3)=12x-5$
3. $g(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=2\mathrm{x}+4$ donc $u'(x)=2$ et $v(x)=3x-1$ donc $v'(x)=3$. Donc

   $$f'(x)=\frac{2(3\mathrm{x}-1)-3(2\mathrm{x}+4)}{(3x-1)^2}=-\frac{14}{(3x-1)^2}$$

Exercice 3

1. $u_0=0^2-3\times 0+4=4$ puis de même, $u_1=2$, $u_2=2$, $u_3=4$ et $u_4=8$
2. Il s'agit de résoudre l'équation : $n^2-3n+4=32 \Leftrightarrow n^2-3n-28=0$. Cette équation a deux solution dans $\mathbb{R}$, -4 et 7 . Seul 7 est un entier naturel et c'est donc l'unique n tel que $u_n=32$.

Exercice 4

1. $V_2=V_{0+2}=2V_{0+1}+V_0=2\times 4+8=16$
   $V_3=2V_2+V_1=2\times 16+4=36$
   $V_4=2V_3+V_2=2\times 36+16=88$
   $V_5=2V_4+V_3=2\times 88+36=212$

Exercice 5

1. $\vec{BD}\cdot\vec{AC}=(\vec{BA}+\vec{AD})\cdot(\vec{AB}+\vec{BC})=\vec{BA}\cdot\vec{AB}+\vec{BA}\cdot\vec{BC}+\vec{AD}\cdot\vec{AB}+\vec{AD}\cdot\vec{BC}=AD^2-AB^2=6^2-3^2=27$
   car : $\vec{BA}\perp\vec{BC}$, $\vec{AD}\perp\vec{AB}$ et $\vec{AD}=\vec{BC}$.

   On a aussi, dans le repère $(A,\frac{\vec{AB}}{3},\frac{\vec{AD}}{6})$, $\vec{BD}(-3;6)$ et $\vec{AC}(3;6)$ donc $\vec{BD}\cdot\vec{AC}=-3\times 3+6\times 6=27$.

2. $ABCD$ est un rectangle donc $BD = \sqrt{BA^2+AD^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EF} = BD\times EF$ car E et F sont les projetés respectifs de A et C sur (BD) . donc

$BD\times EF = 27 \Leftrightarrow EF = \dfrac{27}{DB} = \dfrac{27}{3\sqrt{5}} = \dfrac{9\sqrt{5}}{5} \approx 4$.

Exercice 6

1. $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0-3\times3+0+x\times10 = 10x-9$
2. Les droites (DM) et (AC) sont orthogonales si et seulement si

   $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 10x-9 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{10}$.
3. $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = -x(10-x)+0+0+3\times3$
   $= x^2-10x+9$
4. Le triangle DMC est rectangle en M ssi (MD) et (MC) sont orthogonales c'est-à dire ssi

   $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow x^2-10x+9 = 0$. Cette équation a deux solutions, 1 et 9 qui sont les valeurs cherchées.

Exercice 7

1. Quels que soient les points A , B , C et M ,

   $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AB}$
   $= \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}\cdot\vec{0}+\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}) = 0+\overrightarrow{CA}\cdot\vec{0} = 0$
2. L'égalité précédente est vraie pour tout point M , donc en particulier pour H et on a

   $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$. Or H est le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B donc $(AH)\perp(BC)$ et $(BH)\perp(AC)$ et donc, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$ et on a donc $0+0+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ c'est-à-dire $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (CH)\perp(AB)$. (CH) est la troisième hauteur du triangle ABC donc les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.