1èreS

corrigé de du D.C. n°7

Exercice 1

D'après le théorème d'Al Kashi, $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2 \times MP \times MN \times \cos \widehat{NMP} = 136 - 120 \times \cos(100°) \approx 156,8$ et par suite $NP \approx 12,5$.

On a aussi $MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2 \times MN \times NP \times \cos \widehat{MNP}$ donc $\cos \widehat{MNP} = \dfrac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2 \times MN \times NP} \approx 0,88$ puis $\widehat{MNP} \approx 28,2$. $\widehat{MPN} = 180 - \widehat{MNP} - \widehat{NMP} \approx 51,8$.

Exercice 2

1. Le cercle C a pour centre $I(3,2)$ et pour rayon $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$ L'équation de C est donc :

   $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$

   Remarque : On peut aussi considérer C comme l'ensemble des points M tels que $(AM) \perp (BM)$ ce qui donne $(x-1)(x-5) + (y-1)(y-3) = 0$ et on arrive au même résultat.
2. La tangente en B au cercle C est la droite passant par B et perpendiculaire à (IB) . C'est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow 2(x-5) + 1(y-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 13 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2$. Il s'agit donc du cercle de centre $J(3,-2)$ et de rayon 5 .

Exercice 3

1. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'Q}) = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{P'Q}$ or $[PP']$ est un diamètre du cercle C et Q est un point de C donc (PQ) et (PQ) sont perpendiculaires et $\overrightarrow{P'Q} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, et donc $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'}$.

   $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP'}) = \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}) + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = AO^2 - OP^2 = AO^2 - R^2$

   (car $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'}$)
2. On a donc $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = AO^2 - R^2$ qui ne dépend pas des points P et Q , c'est -à-dire du choix de la droite passant par A . La propriété est donc établie.

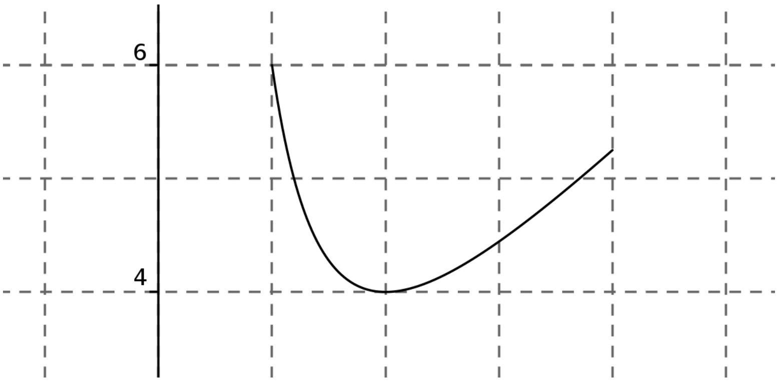
Exercice 5

1. $f'(x) = 1 + 0 + \dfrac{4 \times (-2x)}{(x^2)^2} = 1 - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{x^3 - 8}{x^3}$. Par ailleurs, $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8$ donc

   $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x^3}$.
2. Pour le trinôme $x^2 + 2x + 4$, $\Delta = -12$ donc pour tout x , $x^2 + 2x + 4 > 0$ et on a

x	0		2		$+\infty$
x^3	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
x^2+2x+4		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

3. On a

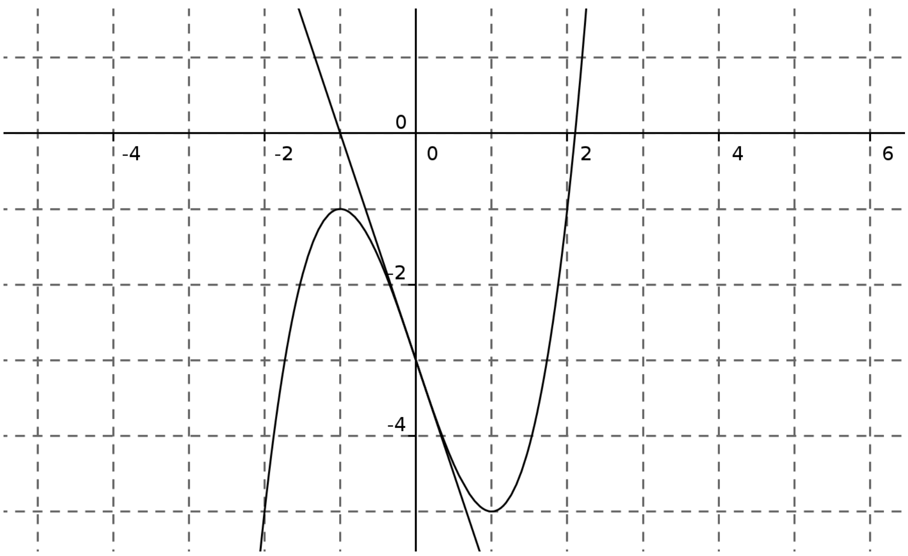


Exercice 6

1. $f'(x) = 3x^2-3 = 3(x^{-1}) = 3(x-1)(x+1)$. Par suite, $f'(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [-1;1]$.
2. On a

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	

3. L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y = -3x-3$.
4. On a



5. Le tableau de variations de f montre que pour tout $x \in]-\infty; 1]$, $f(x) \leq -1$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle. Sur $[;+\infty[$ f est strictement croissante donc l'équation $f(x) = 0$ a au plus une solution sur cet intervalle, puis $f(1) = -5 < 0$ et $f(3) = 15 > 0$ donc f s'annule entre 1 et 3 et donc l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.

Exercice 6

Une parabole P (d'axe parallèle à l'axe des ordonnées) est la représentation graphique d'une fonction f telle que $f(x) = ax^2+bx+c$. P passe par l'origine, équivaut à $f(0) = 0$ $\Leftrightarrow$ $c = 0$ et P est tangente à la droite d'équation $y = x$ équivaut à $f'(0) = 1$ (avec $f(0) = 0$). $f'(x) = 2ax+b$ donc $f'(0) = 1$ $\Leftrightarrow$ $b = 1$. On a donc

$f(x) = ax^2+x$ et le sommet S de la parabole P a pour coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2a}$.

$f(\alpha) = a(\dfrac{-1}{2a})^2 - \dfrac{1}{2a} = -\dfrac{1}{4a} = \dfrac{1}{2}\alpha$ donc S a pour coordonnées $(\alpha; \dfrac{1}{2}\alpha)$ et donc S appartient à la droite

d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.