1èreS

corrigé de du D.C. n°8

Exercice 1

1. $S=(24+1)\times\frac{u_{24}+u_0}{2}$. $u_0=5$ et $u_{24}=5+24\times3=77$ donc $S=25\times\frac{77+5}{2}=1025$.
2. T est la somme de termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=\frac{8}{7}$ et de raison $\frac{1}{2}$. On a alors $u_n=\frac{2^{3-n}}{7}$ et $\frac{1}{7168}=\frac{2^{-10}}{7}=u_{13}$ donc $T=\frac{8}{7}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{14}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{16383}{7168}$.

Exercice 2

1. pour l'année $n+1$, l'opérateur C conserve 80 % de ses abonnés à l'année n ce qui représente $\frac{4}{5}u_n$ et capte 30 % des abonnés de M ce qui représente $\frac{3}{10}v_n$. On a donc bien $u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+\frac{3}{10}v_n$. de même, $v_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{7}{10}v_n$.

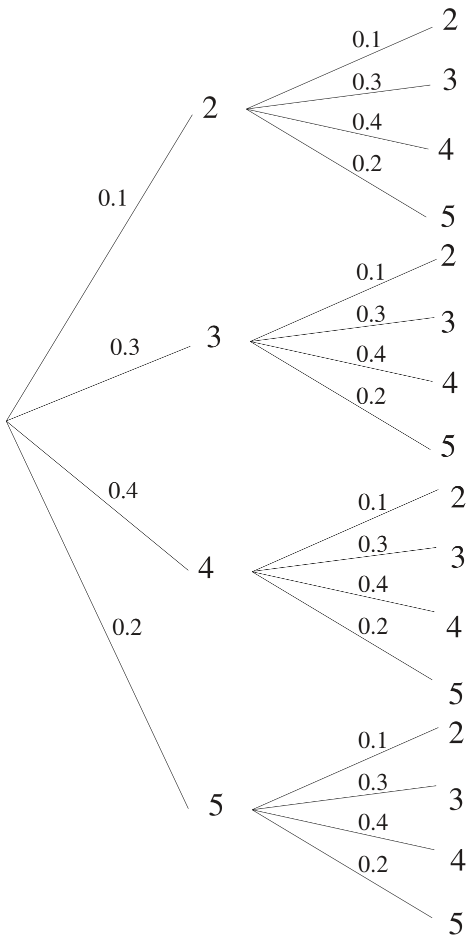
2. a. $s_{n+1}=u_{n+1}+v_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+\frac{3}{10}v_n+\frac{1}{5}u_n+\frac{7}{10}v_n=u_n+v_n=s_n$ donc (s_n) est une suite constante et donc pour tout n , $s_n=s_0=u_0+v_0=320+180=500$.

   b. $t_{n+1}=-2u_{n+1}+3v_{n+1}=-2\left(\frac{4}{5}u_n+\frac{3}{10}v_n\right)+3\left(\frac{1}{5}u_n+\frac{7}{10}v_n\right)=-u_n+\frac{3}{2}v_n=\frac{1}{2}(-2u_n+3v_n)=\frac{1}{2}t_n$ donc (t_n) est une suite géométrique de de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $t_0=-2u_0+3v_0=-100$.

3. (t_n) est une suite géométrique de de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $t_0=-100$ donc $t_n=-\frac{100}{2^n}$. On a alors, $\begin{cases}u_n+v_n=500\\-2u_n+3v_n=-\frac{100}{2^n}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_n+2v_n=1000\\-2u_n+3v_n=-\frac{100}{2^n}\end{cases}$ ce qui amène à $5v_n=1000-\frac{100}{2^n}$ $\Leftrightarrow v_n=200-\frac{20}{2^n}$ puis $u_n=300+\frac{20}{2^n}$.

4. u_n semble se stabiliser vers 300 et v_n vers 200 .

Exercice 3

1. 

2. a. Il n'y a qu'un chemin qui conduit a $X = 10$. Il correspond à une probabilité de $0,2$ sur chaque branche, donc $p(X = 10) = 0,2^2$.
4 chemin conduisent à $X = 7$, et on a $p(X = 7) = 0,1\times 0,2+0,3\times 0,4+0,4\times 0,3+0,2\times 0,1 = 0,28$.

b. De la même façon que pour $p(X = 7)$, on obtient :

x_i	4	5	6	7	8	9	10
$p(X = x_i)$	0,01	0,06	0,17	0,28	0,28	0,16	0,04

c. $E(X) = 4\times 0,01+5\times 0,06+6\times 0,17+7\times 0,28+8\times 0,28+9\times 0,16+10\times 0,04 = 7,4$.
En tirant deux séries de penaltys, on peut donc espérer marquer 7,4 buts en moyenne.

Exercice 4

1. Le choix d'une résistance est une épreuve de Bernoulli car il y deux issues possibles, la résistance est défectueuse ou pas. Comme on assimile le choix a un tirage avec remise, on a donc 1000 épreuve de Bernoulli indépendantes et X suit la loi binomiale $B(5\times 10^{-3};1000)$.

2. $p(A) = p(X = 2) = \binom{1000}{2}\times(5\times 10^{-3})^2\times(1-5\times 10^{-3})^{1000-2} \approx 0,084$.

3. $p(B) = p(X \leq 2) = p(X = 0)+p(X = 1)+p(X = 2) \approx 0,124$.

4. $E(X) = 1000\times 5\times 10^{-3} = 5$ donc dans un lot de 1000, on peut craindre en moyenne 5 résistances défectueuses.