1èreS1

corrigé de l'évaluation n°5

Exercice 1

1. On a $S_0 = 0$, $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = -3$ et $S_4 = -8$. On en déduit $u_0 = 1-0 = 1$, $u_1 = 0-1 = -1$, $u_2 = -3-0 = -3$ et $u_3 = -8-(-3) = -5$.
2. $u_n = S_{n+1} - S_n = -(n+1)^2 + 2(n+1) - (-n^2 + 2n) = -2n+1$.
3. $u_{n+1} = -2(n+1)+1 = -2n+1-2 = u_n - 2$

Exercice 2

1. $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 3 = \frac{1}{2}\times 2 - 3 = -2$, $u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 3 = \frac{1}{2}\times(-2)-3 = -4$ et $u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 3 = \frac{1}{2}\times(-4)-3 = -5$.
2. $u_n > -6 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n > -3 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n - 3 > -6 \Leftrightarrow u_{n+1} > -6$. On a $u_0 = 2 > -6$ donc par suite $u_1 > -6$ puis $u_2 > -6$ et ainsi de suite donc pour tout n , $u_n > -6$.
3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 3 - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 3 = -\frac{1}{2}(u_n+6)$. Or $u_n > -6$ donc $u_n + 6 > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n+6) < 0$ ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 3

La courbe C_2 représente une fonction strictement croissante et la courbe C_1 ne représente pas une fonction strictement positive donc C_2 ne représente pas f et donc c'est C_1 qui représente f .

Exercice 4

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$ donc $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2+2x-3)$. Le trinôme x^2+2x-3 a pour racines -3 et 1 , on en déduit $f'(x) = 3(x+3)(x-1)$ et on a :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	31	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Posons $u(x) = x^2 - 5$ donc $u'(x) = 2x$ et $v(x) = x+3$ donc $v'(x) = 1$. On a alors $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2x(x+3)-(x^2-5)}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}$ et on a :

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Posons $u(x) = \sqrt{x}$ donc $u(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v(x) = x-3$ donc $v'(x) = 1$. On a alors

$f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = \dfrac{x-3}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x} = \dfrac{3x-3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$ et on a :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$