CONTINUITE, PRIMITIVES

1. Compléments sur les limites

1. Limites d'un polynôme et d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$.
   a. La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle de son terme de plus haut degré.
   Exemple : $\lim_{x\to+\infty}(x^2-7x+2)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.
   b. La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle de l'expression obtenue en remplaçant les numérateurs et dénominateurs par leurs termes de plus haut degré.
   Exemple : $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-x+15}{3x^2-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$.
2. Théorème de comparaison
   a. Si pour tout $x\in[a;+\infty[$, $f(x)\geq g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
   b. Si pour tout $x\in[a;+\infty[$, $f(x)\leq g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.
   c. Si pour tout $x\in[a;+\infty[$, $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=l$ alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$.
   remarque : On a des énoncé équivalents pour les limites autres qu'en $+\infty$.

2. Continuité

1. Définition
   Une fonction continue sur un intervalle est une fonction dont la représentation graphique est formée d'un seul trait.
2. Continuité des fonctions usuelles.
   a. La somme, la différence et le produit de deux fonctions continues est continu. De même que le quotient d'une fonction continue par une fonction non nulle continue.
   b. Conséquence : Toutes les fonctions de référence, et notamment les polynôme et les fonctions rationnelles sont continues sur leurs ensembles de définition.
3. Théorème des valeurs intermédiaires
   Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ et si $m\in[f(a);f(b)]$ ($[f(b);f(a)]$), alors l'équation f(x)=m a au moins une solution dans $[a;b]$.
   Si de plus f est une fonction strictement monotone, alors cette équation a exactement une solution dans $[a;b]$.

3. Primitives

1. Définition

On dit qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f si F' = f.

2. Propriétés
   Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une fonction f sur un intervalle [a;b], alors il existe une constante c telle que $F_2(x) = F_1(x) + c$.
3. Primitives des fonctions usuelles
   On obtient les primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau de dérivation. On a donc :

$f(x)$	0	a	x	x^n	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$F(x)$	c	$ax+c$	$\frac{x^2}{2}+c$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$-\frac{1}{x}+c$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$2\sqrt{x}+c$

   Remarque : Le tableau précédent ne permet pas de trouver une primitive à la fonction inverse.
4. Règles de calcul
   Il n'y pas d'autres règles de calcul sur les primitives que celles que l'on peut déduire directement du tableau de dérivation. On a donc, si f et g sont des fonctions continues de primitives respectives F et G, et si k et c sont des réels :

fonction	kf	$f+g$	$\frac{f'}{f^2}$	$f' \times f^{n-1}$	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$
primitive	$kF+c$	$F+G+c$	$-\frac{1}{f}+c$	$\frac{f^n}{n+1}+c$	$2\sqrt{f}+c$

4. Intégrales

1. Définition
   Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et si F est une primitive de f, alors la valeur $F(b)-F(a)$ s'appelle intégrale de a à b de la fonction f, et se note $\int_a^b f(x)\,dx$.
   Remarques : La valeur $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de la primitive choisie pour la calculer. $F(b)-F(a)$ peut se noter aussi $[F(x)]_a^b$.
2. Propriété fondamentale
   Si f est une fonction positive, et si $a<b$ alors $\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.