EXPONENTIELLE

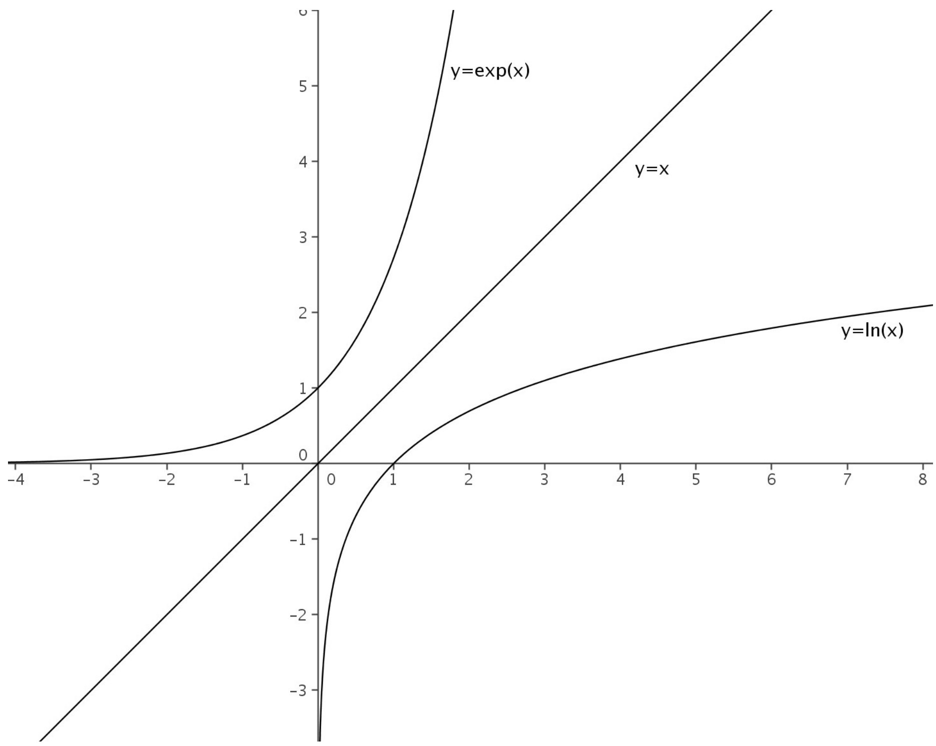
1. Définition

La fonction logarithme est continue et croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$. de plus $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc pour tout nombre réel x, l'équation $\ln x = a$ a une unique solution. Cette solution s'appelle exponentielle de a et se note $\exp(a)$

Remarque : Par définition $\ln(\exp(a)) = a$ et on a aussi pour tout $a > 0$ $\exp(\ln(a)) = a$.

2. Fonction exponentielle

1. La fonction $x \to \exp(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$
3. Pour tout x, $\exp(x) \in]0;+\infty[$
4. représentation graphique



Remarque : exp(0) = 1, exp(1) = e et d'une façon générale, pour tout entier n $\exp(n) = e^n$. En conséquence, on choisi de noter pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$

3. Propriétés

1. Propriété fondamentale
   Pour tous réels a et b on a :
   $e^{a+b}=e^a\times e^b$.
2. Conséquences
   Pour tous réels a et b on a :
   a. $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$
   b. $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$
   c. $e^{na}=(e^a)^n$
   d. $e^{\frac{1}{2}a}=\sqrt{e^a}$
3. Équations et inéquations
   Pour tous réels a et b
   a. $e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$
   b. $e^a<e^b \Leftrightarrow a<b$ et $e^a>e^b \Leftrightarrow a>b$
   c. $e^a<1 \Leftrightarrow a<0$ et $e^a>1 \Leftrightarrow a>0$

4. Limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$
   Ces deux limites signifient que « e^x domine sur x »
2. D'une façon plus générale, pour tout entier $n>0$,
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\ln x}=+\infty$
   Ceci signifie que e^x domine sur n'importe quelle puissance de x et que n'importe quelle puissance de x domine sur lnx. Par conséquent on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}=+\infty$

5. Dérivées

1. La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même. Si $u(x)=e^x$ alors $u'(x)=e^x$
2. Si f est la fonction définie par $f(x)=e^{u(x)}$, alors $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.
3. Réciproquement, si une fonction est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ alors ses primitives sont de la forme $e^{u(x)}+c$.

6. **Puissances**
    1. Pour tout réel $a>0$ et tout entier n, $e^{n\ln a}=(e^{\ln a})^n=a^n$. Par extension, pour tout réel $a>0$ et tout réel x, on définit $a^x=e^{x\ln a}$ .Toutes les règles de calcul sur les puissances restent valables avec cette définition.
    2. En particulier, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$, et on appelle le nombre $a^{\frac{1}{n}}$ racine n$^{\text{ième}}$ de a. On la note aussi $\sqrt[n]{a}$. En particulier $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$ et $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$.
    3. Si a_1, a_2..., a_n sont n réels positifs, le nombre $(a_1\times a_2\times\ldots\times a_n)^{\frac{1}{n}}$ s'appelle moyenne géométrique des nombres a_1, a_2..., a_n .

7. **Fonctions puissances**

    Si a est un réel strictement positif et si $f(x)=a^x$, alors $f'(x)=\ln a\times a^x$. En conséquence, si $0<a<1$ la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et si $a>1$ la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.